

Bsc algebra1 gyakorlat

Hatodik feladatsor (2013. november 4-6)

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor, illetve az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, a felső háromszög alakra hozás módszerével, végül a 3×3 -asokat a Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \mathbf{HF:} \quad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

4. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mátrixra $\det A = 5$, akkor mennyi $\det(A + A)$?

5. Egy 2012×2012 -es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?

6. Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.

7. Egy 3×3 -as determináns egyjegyű számokból áll. Minden sorban a három számjegyből alkotott háromjegyű szám héttel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns osztható héttel.

8. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$ -es mátrixban van egy $m \times k$ -as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

9. Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

10. (*) Egy M mátrix $\text{tr}(M)$ nyoma a főátlóban álló elemek összege. Igazoljuk, hogy minden 2×2 -es mátrixra $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)E = 0$. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben az $X^2 = E$, $X^2 = -E$ és $X^2 = 0$ egyenletek mindegyikének minél többféle (végtelen sok) megoldását.

11. Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a 'hátról előre' permutációban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

12. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában?

13. Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

14. Legyen M egy 3×3 -as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n -edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j -re, akkor a determináns értéke valós.

16. Az 5×5 -ös $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?