

**Bsc algebra1 gyakorlat**  
 Ötödik feladatsor (2013. október 14–22)

1. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek **általános** megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + 6z = 14 \\ -3x \quad \quad + 2z = 3 \\ x - 6y + 14z = 31 \end{array} \qquad \text{IHF:} \qquad \begin{array}{l} x - y + z + t = 2 \\ -3x \quad \quad + 3t = 0 \\ -2x - y + z + 4t = 2 \\ 4x - y + z - 2t = 2 \end{array}$$

2. Az alábbi táblázat celláiba írjunk be egy-egy megfelelő  $n$  ismeretlenes,  $m$  egyenletből álló (minél egyszerűbb)  $\mathbb{R}$  feletti lineáris egyenletrendszert, melynek  $t$  (valós) megoldása van ( $t = \infty$  is lehetséges), illetve N betűt, ha a megfelelő eset nem fordulhat elő.

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$	Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$				$n < m$			
$n = m$				$n = m$			
$n > m$				$n > m$			

3. Ha egy  $\mathbb{Q}$  feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy  $\mathbb{R}$  feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?

4. Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes  $\mathbb{R}$ -beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet  $\mathbb{C}$  felett?

5. Az  $AB, BA, BC, CB - C$  műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Adjunk meg olyan  $10 \times 10$ -es  $A \neq B$  mátrixokat és egy  $10 \times 100$ -as  $C \neq 0$  mátrixot, amelyekre  $AC = BC$  teljesül. Meg lehet-e adni az  $A \neq B$  mátrixokat úgy is, hogy ez **minden**  $10 \times 100$ -as  $C$ -re teljesüljön?

7. Számítsuk ki az  $5 \times 5$ -ös  $N = ((n_{ij}))$  mátrix első öt hatványát, ahol  $n_{ij} = 1$ , ha  $i - j = 1$ , és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy  $n \times n$ -es  $M = ((m_{ij}))$  mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz  $m_{ij} = 0$  ha  $i \geq j$ ). Bizonyítsuk be, hogy  $M^n = 0$ .

8. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonalisában?

9. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

11. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

12. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y + 3z = 2 & 2x + 3y + z = 11 & 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + y + z = 4 & x - y - 2z = -7 & x - y - 2z = -7 \\ 2x - 2y + 3z = 10 & 3x + 2y - z = 2 & 3x + 2y - z = 4 \end{array}$$

13. Mely valós  $c$ -re hány valós megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? A  $c = 2$  esetben adjuk meg  $z$  értékét annál a megoldásnál, melynél az  $xy$  szorzat maximális:

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2z = 1 \\ & y & - cz = -1 \\ x + cy & - & 2z = -1 \end{array}$$

14. Adott 2014 szám úgy, hogy közülük bármely 2013 összege 2014. Melyek ezek a számok?

15. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

- (1) Ha az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása, akkor az  $A\mathbf{x} = 0$  homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása.
- (2) Ha az  $A\mathbf{x} = 0$  homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása, akkor az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása.
- (3) Ha  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ , és az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ -re létezik megoldása az  $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$  egyenletrendszernek is.
- (4) Ha  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6$ , és az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^6$ -ra létezik megoldása az  $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$  egyenletrendszernek is.

16. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

17. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges:  $A + A$ ,  $A + B$ ,  $AB$ ,  $AC$ ,  $AC^T$ ,  $DD^T$ ,  $D^T D$ ,  $AC + 2C$ ,  $AD - 3D$ ,  $D^2$ ,  $BC$ ,  $CB$ . Itt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = (-1 \quad -2 \quad -3), \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

18. Ha  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , akkor mi az  $N$  mátrix második sorának harmadik eleme?

19. Adjuk meg azokat az  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrixokat, melyekre  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A = A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

20. Jelölje  $E^{(ij)}$  azt a mátrixot, amelynek  $i$ -edik sorában a  $j$ -edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorozunk  $E^{(ij)}$ -vel? Van-e olyan  $3 \times 3$ -as  $A$  mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges  $3 \times 3$ -as  $X$  mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az  $X$  többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen  $A$  akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

21. Az  $M$  és  $N$  mátrixok **felcserélhetőek**, ha  $MN = NM$ . Keressük meg az összes olyan háromszor hármes mátrixot, amely az  $E^{(23)}$ -mal felcserélhető (lásd az előző feladatot), és azokat is, amelyek **minden** háromszor hármes mátrixszal felcserélhetőek.

22. (\*) Igazoljuk, hogy ha  $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , akkor  $MN - NM$  nem lehet az egységmátrix.