

Bsc algebra1 gyakorlat

Harmadik feladatsor (2013. szeptember 23–25)

- (1.3.11)** Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|(4+i)/(4+i)|$, $|(1+1526i)^{100}/(1-1526i)^{100}|$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{1241}$, $(-1+i\sqrt{3})^3$.
- Mivel egyenlő i^{2011} és $1+i+\dots+i^{2011}$?
- (1.3.12)** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket: $x^2+1=0$, $x^2=-12$, $x^2+2x+2=0$, $x^2+2ix-1=0$. Írjuk is föl a megfelelő polinomokat gyöktényezőss alakban \mathbb{C} fölött.
- (1.3.13)** Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$. Oldjuk meg az $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ egyenletet.
- Tegyük föl, hogy $(x+iy)^n=3+2i$. Mennyi lesz ekkor $(x^2+y^2)^n$?
- Soroljuk föl az első húsz pozitív egész számot, ami nem áll elő két négyzetszám összegeként. Mutassuk meg, hogy ha az m és n egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor mn is előáll így.
- (1.4.2, 1.4.8)** Hozzuk trigonometrikus alakra: $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\cos(30^\circ)-i\sin(60^\circ)$, $\sin\alpha+i\cos\alpha$, $(1+i\operatorname{tg}\alpha)/(1-i\operatorname{tg}\alpha)$.
- (1.5.14)** Oldjuk meg az $x^3=2$ és az $x^4=-9$ egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az $x^8=\sqrt{3}-i$, $x^n=-1$ egyenletek összes megoldását is.
- (2.5.10)** Írjuk föl az x^4+4 polinomot gyöktényezőss alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?
- (1.5.24)** Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$ -et.
- (1.5.23*)** Hozzuk „zárt alakra” a következő összeget:
$$\binom{1867}{0} + \binom{1867}{4} + \binom{1867}{8} + \binom{1867}{12} + \dots$$
- (1.4.16**)** Hozzuk zárt alakra a $\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)$ összeget.

További gyakorló feladatok

- Mely z komplex számokra igaz, hogy z konjugáltjának képzetes része ugyanaz, mint z képzetes részének konjugáltja?
- Legyen $z=5-12i$. Mely valós c számokra teljesül, hogy $|cz|=1$?
- Igazoljuk, hogy egy z komplex szám abszolút értéke akkor és csak akkor 1, ha z reciproka megegyezik a konjugáltjával.
- Mennyi $\cos(-30^\circ)-i\sin(-30^\circ)$ szöge? Ha z szöge 40° , akkor mennyi $2010/\bar{z}^{2010}$ szöge? Ha w abszolút értéke 1, szöge pedig 60° , akkor mennyi \bar{w}/w^2 ?
- Bizonyítsuk be n szerinti teljes indukcióval, hogy

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^n j^3 = \left(\sum_{j=1}^n j\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$