Bsc algebra1 gyakorlat

Második feladatsor (2013. szeptember 16–18)

1. ***(2.4.14)*** A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6-4x^4+x^3-x^2+4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x)+f(2)$ alakban.

2. ***(2.5.11)*** Hányszoros gyöke az x^4-x^3-x+1 polinomnak az 1? A Horner-elrendezést használjuk.

3. Adjunk példát olyan 2012 fokú polinomra, melynek az 1 pontosan tízszeres, a -1 pedig pontosan 20-szoros gyöke.

4. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f-nek és hatszoros gyöke g-nek, akkor hányszoros gyöke $f+g$-nek, illetve $f+g+fg$-nek?

5. Mutassuk meg, hogy az x^2+bx+c polinomnak akkor és csak akkor van kétszeres gyöke, ha $b^2=4c$.

6. Ha egy harmadfokú polinomnak van kétszeres gyöke, akkor hány (valós) gyöke van? Hány valós gyök lehet, ha a polinom negyedfokú?

7. ***(3.3.16)*** Adjuk meg a $2x^3+3x+5$ polinom racionális gyökeit.

8. Határozzuk meg azt a c számot, melyre a $6x^4+x^3+23x^2+4x+c$ polinomnak gyöke az $1/3$, majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.

9. Számítsuk ki az alábbi összegeket.

$$\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{100}2^i\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{100}(-1)^i\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{50}\binom{100}{2i}, \qquad \sum_{i=0}^{50}\binom{101}{i}.$$

10. ***(2.4.20*)*** Van-e olyan egész együtthatós f polinom, melyre $f(10)=400$, $f(14)=440$ és $f(18)=520$?

11. ***(2.4.26*)*** Ha az $f\in\mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

12. ***(2.4.16)*** Az n-edfokú $f(x)$ polinomba behelyettesítjük a b számot. Hány szorzásra van szükség $f(b)$ kiszámításához, ha

(1) egyáltalán nem trükközünk;
(2) a b hatványait előre kiszámoljuk;
(3) a Horner-elrendezést használjuk?

13. ***(*)*** Mutassuk meg, hogy az x^3+px+q polinomnak akkor és csak akkor van legalább kétszeres gyöke, ha $27q^2+4p^3=0$.

14. ***(*)*** Legyen $f(x)=6x^4+35x^3+62x^2+35x+6$. Írjuk föl f-et $x+(1/x)$ polinomjaként, majd keressük meg a gyökeit.

15. ***(*)*** Legyen $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{R}[x]$ páros fokú polinom, amely „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i=a_{n-i}$ minden $0\le i\le n$ esetén, és $a_0\neq 0$. Mutassuk meg, hogy f felírható $x+(1/x)$ polinomjaként.

16. ***(3.5.8*)*** Legyen $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{R}[x]$, ahol a_0 és a_n nem nulla, és $g(x)=a_n+a_{n-1}x+\ldots+a_0x^n$. Igazoljuk, hogy a g polinom $\mathbb{R}$-beli gyökei pontosan az f gyökeinek a reciprokai (multiplicitással számolva is).