Explicit képlet a Fibonacci-sorozatra

Azt a megoldást mutatjuk meg, amely a mátrix diagonalizálásának hasznosságát mutatja. A Fibonacci-sorozatot definiáló rekurzió $a_0 = a_1 = 1$ és $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$. Legyen

$$v_k = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} .$$

A sorozatot megadó rekurzió mátrixszorzássá írható át:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad v_{k+1} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_k \,.$$

Az itt szereplő mátrixot M-mel jelölve tehát $v_{k+1} = Mv_k = M^2 v_{k-1} = \cdots = M^k v_1$. Így elegendő az M mátrix hatványaira explicit képletet adni. Ehhez M-et bázistranszformációval diagonális alakra hozzuk. Az M karakterisztikus polinomja

$$k(x) = \left| \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \right| = x^2 - x - 1 \,.$$

Ennek gyökei, vagyis M sajátértékei

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(melyekre tehát $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ és $\lambda_1\lambda_2 = -1$). A megfelelő saját-vektorokat egy mátrix oszlopaiba írva kapjuk a diagonalizálást elvégző bázistranszformáció mátrixát:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} , \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D \,.$$

Innen $D^k = S^{-1}MSS^{-1}MS \ldots S^{-1}MS = S^{-1}M^kS$, tehát $M^k = SD^kS^{-1}$. Diagonális mátrixot elemenként lehet hatványozni, így az inverz mátrix képletét felhasználva M^k-ra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 & -\lambda_1^k + \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1}\lambda_2 - \lambda_2^{k+1}\lambda_1 & -\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

adódik. A $v_k = Mv_1$ összefüggésből tehát

$$a_k = -(\lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 - \lambda_1^k + \lambda_2^k)/\sqrt{5} \,.$$

Ezt még tovább alakíthatjuk a $\lambda_1\lambda_2 = -1$ és a $\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$ felhasználásával (utóbbi azért igaz, mert $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$). A végeredmény:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) .$$

A Fibonacci-sorozat tehát exponenciálisan nő. A kivonandó nullához tart, és így a_k az $\left(\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{k+1}\right)/\sqrt{5}$-höz legközelebbi egész szám lesz.