

1. Önadjungált és szimmetrikus transzformációk

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.

Az A *önadjungált*, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha *normális*, és minden (komplex feletti) sajátértéke *valós*.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).

A felcserélhető önmagával így $A^* = A \implies A$ normális. \square

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.

Az A *szimmetrikus*, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis *szimmetrikus mátrix*.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) *ortonormált bázisban*, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció. A megfordítást a 9. előadáson bizonyítjuk.

2. Kvadratikus alakok valós fölött

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$.

Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: *pozitív definit*.

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: *pozitív szemidefinit*.

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} : *indefinit*. Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b -re (mert az együtthatóvektorok $(1, 1)$ és $(1, -1)$ bázist alkotnak), így $Q(x, y) = (5/4)a^2 - (1/4)b^2$, ami minden valós értéket felvesz.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.

$$\text{Láttuk: } Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.

$$M_1 \text{ megfelelő sajátvektorai } \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Ezek komponensei adják x és y együtthatóit a négyzetösszegben.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2.$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle.$

De Q felírható *szimmetrikus* mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle.$

Felírás *mátrixszorzással:* $Q = v^T Mv$ (**HF**).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban *összevonva* r_{ij} , akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Minden (valós) kvadratikus alak *egyértelműen* felírható $\langle v, Mv \rangle = v^T M v$ alakban, ahol M *szimmetrikus* mátrix.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB.

Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\text{De } \langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 M b_1 + y_2 M b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1,$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle = b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2$. Azaz

$$Q(x_1, x_2) = \lambda_1 (b_{11} x_1 + b_{21} x_2)^2 + \lambda_2 (b_{12} x_1 + b_{22} x_2)^2$$

HF: Ugyanezt a számolást végezzük el $n \times n$ -es mátrixra.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő sajátvektorok

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.

Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei,

a $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ négyzetösszeg alakja tehát

$$-1\left(\frac{-x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0\left(\frac{-y+z}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+y+z}{\sqrt{6}}\right)^2.$$

Ellenőrzés: A műveletek elvégzésével azonosságot kapunk.

3. Kvadratikus karakter

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q negatív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékére nempozitív, és van közte 0.)
- (5) Q indefinit, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.
(Az M mátrixnak van pozitív és van negatív sajátértéke is.)

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmatrix (más néven *minor*) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor *pozitív definit*, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor *negatív definit*, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

A Q_1 pozitív definit, mert $1 > 0$ és $\det(M_1) = 3/4 > 0$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe *ellipszis*.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe *hiperbola*. Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Diagonalizáljuk M -et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ .

Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.

Ez akkor ellipszis, ha λ és μ pozitív.

Az λ és μ akkor ellentétes előjelű, ha $\det(M) = \lambda\mu < 0$.

4. Kvadratikus alakok komplex fölött

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \overline{x_i} x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_1 + i \overline{x_1} x_2 - i \overline{x_2} x_1 + 7 \overline{x_2} x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \overline{x_1} x_2 - i \overline{x_2} x_1 + 7|x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,

$i \overline{x_1} x_2 - i \overline{x_2} x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

A fenti M mátrix önadjungált, azaz $M^* = M$.

Tétel (F7.4. szakasz, HF)

$Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ értékészlete valós $\iff M$ önadjungált.

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* Mv = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékészlete valós.
- (2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.
- (3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix determinánsa valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl! Általános komplex kvadratikus alak karakteréről nem beszélhetünk.

5. Bilineáris függvények

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén **(HF)**:

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.
- (4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.
- (5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$
(azaz B szimmetrikus).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása (ott M az egységmátrix).

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény *bilineáris*,

ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).

A B *szimmetrikus*, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re.

$Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó *kvadratikus alak* ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,

$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,

továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$.

A B pontosan akkor szimmetrikus, ha $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ minden i, j -re.

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény *mátrixa* ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza. Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. \square

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).

A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható, és ezek között pontosan *egy* lesz szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB, B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$, és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$. Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$. Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor *szimmetrikus*, ha M szimmetrikus, akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert \mathbf{b} ONB.

Legyen $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Ekkor $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$. \square

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda} B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j$.

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \overline{x_j x_i}$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis *minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik*.

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékészlete akkor és csak akkor *valós*, ha B *Hermite-féle*:

minden $v, w \in V$ -re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa *önadjungált*, vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$, ahol A önadjungált transzformáció.

***B*-ortogonalitás**

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok *B-ortogonálisak*, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis *B-ortogonális*, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor *B-ortogonális*, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik *B-ortogonális* bázis. Ha V euklideszi tér, akkor van *B-ortogonális ONB* is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.

B-ortogonális ONB keresése: *sajátértékek* segítségével.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált). Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengeletétel). Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis *B-ortogonális*, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális. Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$,

és ez nulla, ha $i \neq j$. A főátló elemei $B(b_i, b_i) = \lambda_i$. □

E bázisban a B -hez tartozó kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy *B-ortogonális* bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy *B-ortogonális* bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is *B-ortogonális* marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.

Így a főátló elemeinek *nagysága* megváltozhat (de az előjele nem).

HF (F7.2.5. Tétel): elérhető, hogy a főátlóban csak 0, 1, -1 álljon.

6. Összefoglaló

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció.

Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.

Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós.

Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeteminánsokról.

B -ortogonális bázis, illetve ONB létezése; négyzetösszeg alak. Sylvester tehetlenségi tétele.