

# 1. A diagonalizálhatóság feltétele

## Diagonalizálható transzformációk

Legyen  $V$  véges dimenziós vektortér  $T$  fölött és  $A \in \text{Hom}(V)$ .

### Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis  $V$ -ben, melyben  $A$  mátrixa diagonális, ha  $A$  minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik  $T$  fölött, és minden gyöke egyszeres.

### Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha  $T = \mathbb{R}$ , akkor pontosan akkor létezik olyan *ortonormált* bázis  $V$ -ben, melyben  $A$  mátrixa diagonális, ha  $A$  ortonormált bázisban vett mátrixa *szimmetrikus*, azaz  $[A]^T = [A]$ .

A szimmetria szempontjából *mindegy*, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben  $A$  mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az. A főtengelytételt a 9. előadáson bizonyítjuk.

## A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

### Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.

Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden  $f$  polinomra  $[f(A)] = f([A])$  (**HF**).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik. Ha  $M$  diagonális, akkor  $k_M$  minimálpolinomját kiszámoltuk:  $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$ , ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  páronként különbözők (az  $M$  főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk). Az ebben szereplő direkt összegekről a 9. előadáson lesz szó.

# 2. A Jordan-féle normálalak

## Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.

*Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?*

**Példa**

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez  $(x-2)^2$ , az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az  $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis,  $M$  nem diagonalizálható.

**Szebb alak****A példa folytatása**

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ nem diagonalizálható.}$$

Legyen  $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$  és  $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de *tudjuk hatványozni!*

$$\underline{\text{HF}} \text{ (} k \text{ szerinti indukcióval): } N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Innen  $M^k = SN^kS^{-1}$  is kiszámítható:

$$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

**Jordan-blokk****Definíció**

Az  $m \times m$ -es,  $\lambda$ -hoz tartozó *Jordan-blokk*:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig  $\lambda$ , alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

**Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből**

$N^j$  a főátló alatti  $j$ -edik „átlóban” 1, másutt 0. Speciálisan  $N^j = 0$ , ha  $j \geq m$ .

## Jordan-normálalak

### Definíció

Az  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrix *Jordan-alakú*, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

## Jordan tétele

### Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott *Jordan-féle normálalak* azonban *egyértelmű*: csak a blokkok *sorrendje* változhat. Azaz minden  $\lambda$  és  $m$  esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban *hány darab*  $J_{\lambda, m}$  blokk szerepel.

*FONTOS:* Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-ban, de nem minden szakirányon. Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma. A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist. *Haszna:* van képlet a Jordan-alak hatványozására (később).

## Minimálpolinom és Jordan-alak

### Tétel

Az  $M$  mátrix minimálpolinomjában az  $(x - \lambda)$  gyöktényező kitevője a *legnagyobb*  $\lambda$ -hoz tartozó Jordan-blokk mérete.

Például

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

minimálpolinomja  $m_M(x) = (x-2)(x-3)(x-1)^3x^2$ .

**Példák a Jordan-alak kiszámítására**

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja  $-x^3$ . Mivel  $M^2 = 0$  de  $N^2 \neq 0$ , ezért  $m_M(x) = x^2$  és  $m_N(x) = x^3$ . Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek. Az  $M$  Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret  $2 \times 2$ -es, emellé már csak egy darab  $1 \times 1$ -es blokk fér el. Az  $N$  Jordan alakjában egy darab  $3 \times 3$ -as blokk van. Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad N : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első két mátrix hasonló, csak a blokkok sorrendjében különbözik.

**Diagonális blokkmátrix hatványozása**

**Állítás (HF)**

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt  $D_1, \dots, D_n$  tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

**Példa**

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A felső blokk } 90^\circ\text{-os forgatás!})$$

## A Jordan-alak hatványozása

### Állítás

$J_{\lambda,m}^k$  főátlója felett nulla áll;

a főátló alatti  $j$ -edik „átló” végig  $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$  (ahol  $j \geq 0$ ).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

### Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$ . Itt  $N$  és  $\lambda E$  felcserélhető, mert  $N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$ . Így alkalmazható a *binomiális tétel*:

$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \dots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \dots$ . Használjuk föl  $N^j$  ismert szerkezetét.  $\square$

## 3. Leképezés rangja

### Lineáris leképezés rangja

#### Definíció

$A \in \text{Hom}(V, W)$  rangja a képtér dimenziója:  $r(A) = \dim \text{Im}(A)$ .

#### Tétel (F5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja:  $r(A) = r([A])$ .

### Bizonyítás

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben.

HF: Ekkor  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  generátorrendszer  $\text{Im } A$ -ban.

Azaz  $r(A) = \dim \text{Im } A = r(A(b_1), \dots, A(b_n))$ .

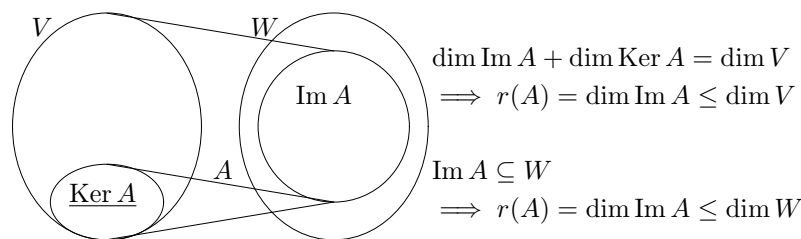
Az  $[A]_{\mathbf{b}, \mathbf{d}}$  oszlopvektorai  $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$ .

De  $r(A(b_1), \dots, A(b_n)) = r([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}) = r([A])$ ,

mert  $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  izomorfizmus, így megőrzi a rangot (HF).

### Összeg rangja

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $r(A) \leq \dim V$  és  $r(A) \leq \dim W$ .



### Állítás

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ .

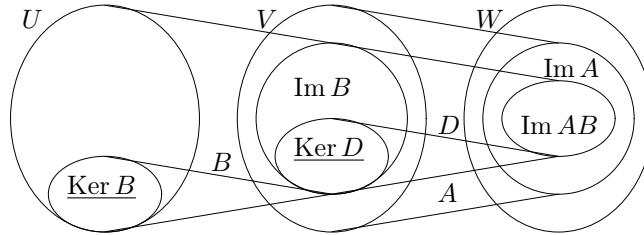
### A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \text{Im}(A + B)$ . HF:  $\text{Im}(A + B) \subseteq \text{Im } A + \text{Im } B$ .  
 $\dim(\text{Im } A + \text{Im } B) \leq \dim \text{Im } A + \dim \text{Im } B = r(A) + r(B)$ ,  
mert  $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ .

### Szorzat rangja

#### Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$  és  $r(AB) \leq r(B)$  leképezésekre, így mátrixokra is.



### Bizonyítás

Mivel  $\text{Im } AB \subseteq \text{Im } A$ , így  $r(AB) = \dim \text{Im } AB \leq \dim \text{Im } A = r(A)$ .

Legyen  $D : \text{Im } B \rightarrow W$ ,  $D(v) = A(v)$ . Ekkor  $\text{Im}(D) = \text{Im}(AB)$ .

A dimenziótételből  $\dim \text{Im } D + \dim \text{Ker } D = \dim \text{Im } B$ .

Így  $r(AB) = r(D) = \dim \text{Im } D \leq \dim \text{Im } B = r(B)$ . □

### Determinánsrang

#### Definíció

Az  $M$  mátrix *determinánsrangja*  $r$ , ha

- (1) kiválasztható  $r$  sor és  $r$  oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló  $r \times r$ -es mátrix determinánsa nem nulla;
- (2) de  $r + 1$  sor és oszlop már nem választható ki így.

#### Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsrangja egyenlő az oszloprangjával.

Bizonyítás: nincs.

Mivel  $M$ -nek és  $M$  transzponáltjának a determinánsrangja a transzponált determinánsról szóló tétel miatt ugyanaz, ezért a sorrang és az oszloprang egyenlő.

## 4. Lineáris egyenletrendszer és rang

### A kibővített mátrix

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n\end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az  $M$  a fenti  $Mx = b$  egyenletrendszer mátrixa.

$$[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix} \text{ a kibővített mátrix.}$$

### A megoldhatóság jellemzése

#### Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen  $M \in T^{n \times m}$ . Az  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával:  $r([M, b]) = r(M)$ . Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $r(M) = m$  (vagyis  $M$  rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

#### Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor *van* megoldás, ha  $b$  benne van az  $M$  oszlopai által generált altérben, vagyis ha  $M$  és  $[M, b]$  oszlopai ugyanazt az alteret generálják. Akkor és csak akkor *egyértelmű* a megoldás, ha  $M$  oszlopai lineárisan függetlenek is.

## 5. Összefoglaló

### A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

#### Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

#### Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége. A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról. Blokk-mátrix és Jordan-blokk hatványozása. A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.