

# 1. Bázistranszformáció

## Transzformáció mátrixa új bázisban

### A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok  $V$ -ben,  $v \in V$  és  $A \in \text{Hom}(V)$ .

Jelölje  $S = \left[ [d_1]_{\mathbf{b}}, \dots, [d_n]_{\mathbf{b}} \right] \in T^{n \times n}$  azt a mátrixot,

amelynek oszlopaiban a  $\mathbf{d}$  vektorainak koordinátái állnak a  $\mathbf{b}$  bázisban.

Ekkor  $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$ , továbbá  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$ .

### Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a  $B$  és  $C$  lineáris leképezés, melyre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

Ekkor  $C = B^{-1}$ , továbbá  $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$  és  $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$ .

Nyilván  $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$  és  $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$  (az egységmátrix).

Ezért  $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$ .

HF:  $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S$  és  $[C]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}$ .

### Hasonlóság

#### Bizonyítás (folytatás)

Mivel  $BC = I_V$ , ezért  $A = BCABC$ . Így

$$\begin{aligned} [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} &= [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = \\ &= ES^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}SE = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S. \end{aligned}$$

□

### Definíció

Legyen  $M, N \in T^{n \times n}$ . Az  $M$  és  $N$  *hasonló*, ha van olyan  $A$  lineáris transzformáció, hogy  $M$  is és  $N$  is az  $A$  mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

### Állítás

Az  $M$  és  $N$  pontosan akkor hasonló, ha  $M = S^{-1}NS$  alkalmas invertálható  $S \in T^{n \times n}$  mátrixra.

Bizonyítás: HF (bázistranszformáció).

## 2. Képtér és magtér

### Magtér és injektivitás

#### Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$ . Az  $A$  magtere  $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$ .

$\text{Ker}(A)$  altér  $V$ -ben, és pontosan akkor  $\{0_V\}$ , ha  $A$  injektív.

#### Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$ , ezért  $0_V \in \text{Ker}(A)$ . Legyen  $u, v \in \text{Ker}(A)$ , ekkor  $A(u) = A(v) = 0$ .

Ezért  $A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$ .

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$ . Tehát  $\text{Ker}(A)$  altér.

Ha  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ , akkor  $A$  injektív, mert ha  $A(u) = A(v)$ , akkor

$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$ , ezért  $u - v = 0$ , azaz  $u = v$ .

Ha  $A$  injektív, akkor  $\text{Ker}(A) = 0$ , mert ha  $v \in \text{Ker}(A)$ , akkor  $A(v) = 0 = A(0)$ , így az injektivitás miatt  $v = 0$ .  $\square$

### Képtér és szürjektivitás

#### Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$ . Az  $A$  képtere  $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$ .

Azaz  $\text{Im}(A)$  az  $A$  értékkészlete, azon  $w \in W$  vektorokból áll, melyekhez van olyan  $v \in V$ , hogy  $A(v) = w$ .

$\text{Im}(A)$  altér  $W$ -ben, és pontosan akkor  $W$ , ha  $A$  szürjektiv.

#### Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$ , ezért  $0_W \in \text{Im}(A)$ . Legyen  $w, t \in \text{Im}(A)$ , ekkor

$A(u) = w$  és  $A(v) = t$  alkalmas  $u, v \in V$ -re. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$ .

$A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \text{Im}(A)$ . Tehát  $\text{Im}(A)$  altér.

Szürjektiv akkor és csak akkor, ha értékkészlete az egész  $W$ .  $\square$

### A dimenziótétel

#### Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$ ,  $\dim(V)$  véges  $\implies \dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$ .

#### Bizonyítás

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $\text{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a  $d_1, \dots, d_m$  vektorokkal  $V$  egy bázisává. Ekkor  $\dim V = m + n$ . Elég tehát belátni, hogy  $A(d_1), \dots, A(d_m)$  bázis  $\text{Im}(A)$ -ban.

*Generátorrendszer:* Ha  $w \in \text{Im}(A)$ , akkor  $w = A(v)$  alkalmas  $v \in V$ -re.

Legyen  $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$ .

Ekkor  $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$ , mert  $A(b_j) = 0$ .

*Független:* Tegyük föl, hogy  $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$ .

Ekkor  $v = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m \in \text{Ker}(A)$ , és így felírható  $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban is. Bázisban  $v$  felírása egyértelmű, ezért  $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ .  $\square$

## A dimenziótétel következménye

### Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha  $\dim(V)$  véges, és  $A \in \text{Hom}(V)$ , akkor  $A$  szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

### Bizonyítás

Dimenziótétel:  $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$ . Ha  $A$  szürjektív, akkor  $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$ , így  $\dim \text{Ker}(A) = 0$ . Ezért  $A$  injektív is. Ha  $A$  injektív, akkor  $\dim \text{Ker}(A) = 0$ , ezért  $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$ . Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért  $A$  szürjektív is.  $\square$

Végtelen dimenzióban *nem igaz!* Példa:

$\mathbb{R}[x]$ -ben  $A(f(x)) = xf(x)$ . Injektív, de nem szürjektív.

$\mathbb{R}[x]$ -ben  $A(f(x)) = f'(x)$  (derivált). Szürjektív, de nem injektív.

## 3. Az invertálhatóság jellemzése

### Leképezés determinánsa

#### Definíció

Legyen  $A \in \text{Hom}(V)$ , ahol  $V$  véges dimenziós vektortér.

Ekkor  $A$  *determinánsa*  $\det(A) = \det[A]$ .

$[A]$  az  $A$  mátrixa, *de melyik bázisban?* **MINDEGY!**

A bázistranszformáció képlete miatt  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$ .

Determinánsok szorzástétele:  $\det(S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S) = \det([A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}})$ ,

hiszen a  $\det(S^{-1})$  és  $\det(S)$  számok egymás reciprocai.

A  $\det(A)$  jelentése: *hányszorosára növeli  $A$  a térfogatot.*

Pontos tárgyalás *előjeles mértékek* segítségével: lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.

$\det(A)$  pozitív, ha  $A$  *irányítástartó*, negatív, ha  $A$  *irányításváltó*.

## Az invertálhatóság nyolc jellemzése

### Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha  $\dim(V)$  véges, és  $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ , akkor *ekvivalens*:

- (1)  $A$  invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami *lineáris*).
- (2)  $A$ -nak van balinverze (azaz van  $X \in \text{Hom}(V)$ , melyre  $XA = I$ ).
- (3)  $A$ -nak van jobbinverze.
- (4)  $A$  nem bal oldali nullosztó (azaz  $AC = 0 \implies C = 0$ ).
- (5)  $A$  nem jobb oldali nullosztó (azaz  $DA = 0 \implies D = 0$ ).
- (6)  $A$  injektív (azaz  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ ).
- (7)  $A$  szürjektív (azaz  $\text{Im}(A) = V$ ).
- (8)  $A$  bijektív.
- (9)  $\det(A) \neq 0$ .

Itt  $C$  és  $D$  is  $\text{Hom}(V)$ -ben van.

### Az invertálhatóság jellemzései: megjegyzések

(1)  $\implies$  (2),(3) triviális, (6),(7)  $\implies$  (8) volt már.

Az  $A$  mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: **HF**. Ezért (8)  $\iff$  (1).

Az  $A$  pontosan akkor invertálható, ha  $[A]$  invertálható. Egy  $M$  mátrix pontosan akkor invertálható, ha  $\det(M) \neq 0$  (előző félév). Ezért (8)  $\iff$  (9).

Ha  $A$  bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha  $AC = 0$ , de  $XA = I$ , akkor  $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$ . Ez *ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes*. Ezért (2)  $\implies$  (4). Hasonlóan (3)  $\implies$  (5) (**HF**).

### Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy (4)  $\implies$  (6) és (5)  $\implies$  (7), mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

#### Állítás ((4) $\implies$ (6))

Ha  $V$  véges dimenziós, és  $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$  nem injektív, akkor létezik  $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$ , hogy  $AC = 0$ .

#### Bizonyítás

$A$  nem injektív, ezért létezik  $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$ . Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan  $C \in \text{Hom}(V)$ , hogy  $C(b_j) = v$  minden  $j$ -re. Tehát  $C \neq 0$ . Ugyanakkor  $AC(b_j) = A(v) = 0$  minden  $j$ -re, mert  $v \in \text{Ker}(A)$ . Azaz  $AC$  egy bázis minden elemét nullába viszi, így minden vektort nullába visz, tehát  $AC = 0$ .  $\square$

### Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

#### Állítás ((5) $\implies$ (7))

Ha  $V$  véges dimenziós, és  $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$  nem szürjektív, akkor létezik  $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$ , hogy  $DA = 0$ .

#### Bizonyítás

$A$  nem szürjektív, így  $\text{Im}(A)$  nem az egész  $V$ . Legyen  $b_1, \dots, b_m$  bázis  $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a  $d_1, \dots, d_k$  vektorokkal  $V$  egy bázisává. Ekkor  $k \neq 0$ . Az előírhatósági tétel miatt van olyan  $D \in \text{Hom}(V)$ , hogy  $D(b_i) = 0$  minden  $i$ -re és  $D(d_j) = d_j \neq 0$  minden  $j$ -re. Tehát  $D \neq 0$ , viszont  $D(v) = 0$  minden  $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen  $v$  felírható  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$  alakban, és  $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \dots + \lambda_m D(b_m) = 0$ . Így  $DA(w) = 0$  minden  $w \in V$ -re, mert  $v = A(w) \in \text{Im}(A)$ .  $\square$

### Mátrix invertálhatóságának jellemzései

#### Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A  $0 \neq M \in T^{n \times n}$  mátrixra ekvivalens:

- (1)  $M$  invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2)  $M$ -nak van balinverze.
- (3)  $M$ -nak van jobbinverze.
- (4)  $M$  nem bal oldali nullosztó (azaz  $MC = 0 \implies C = 0$ ).
- (5)  $M$  nem jobb oldali nullosztó (azaz  $DM = 0 \implies D = 0$ ).
- (9)  $\det(M) \neq 0$ .

Itt  $C$  és  $D$  is  $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

#### Bizonyítás

A mátrixok és a lineáris transzformációk közötti kölcsönösen egyértelmű, művelettartó megfeleltetésből következik.

### Bal- és jobbinverz

#### Tétel

Ha  $\dim(V)$  véges,  $A, B \in \text{Hom}(V)$  és  $AB = I$ , akkor  $BA = I$ .

#### Bizonyítás

A feltétel szerint  $A$ -nak van jobbinverze (a  $B$ ), ezért az előző tétel miatt van egy  $C$  balinverze is:  $CA = I$ . Ekkor  $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$ . Azaz  $B = C$  tehát  $B$  kétoldali inverz:  $BA = CA = I$ .  $\square$

### Fontos megjegyzés

Innen négyzetes mátrixokra  $MN = E \implies NM = E$ . Ezt tavaly előjeles aldeteminánsokkal bizonyítottuk. A mostani számolásmentes bizonyítás mélyén a dimenziótétel van. Ez az absztrakt módszerek erejét demonstrálja.

## 4. Sajátérték és sajátvektor

### Leképezés diagonális mátrixa

#### Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$  *diagonalizálható*, ha van olyan bázis, amelyben  $A$  mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$  és  $b_1, \dots, b_n$  ilyen bázis. Ha  $[A]_{\mathbf{b}, \mathbf{b}}$  főátlójában  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  áll, akkor  $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$  kell.

#### Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

$V$  vektortér,  $A \in \text{Hom } V$  és  $v \in V$ , vagy  $A \in T^{n \times n}$  és  $v \in T^n$ .

Ha  $A(v) = \lambda v$ , ahol  $v \neq 0$  (de  $\lambda$  lehet nulla), akkor

$\lambda$  *sajátértéke*,  $v$  pedig egy  $\lambda$ -hoz tartozó *sajátvektora*  $A$ -nak.

A  $\lambda$  sajátértékhez tartozó *sajátaltér*  $\{v : A(v) = \lambda v\}$ , vagyis

a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. HF: ez altér.

Nyilván  $Av = \lambda v \iff [A][v] = \lambda[v]$ . Ezért  $A$  sajátértékei ugyanazok, mint a mátrixának a sajátértékei.

### A sajátértékek meghatározása

#### Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$  diagonalizálható  $\iff$  van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v.$$

Azaz  $v$  sajátvektor a  $\lambda$  sajátértékhez  $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ .

Így  $\lambda$  sajátérték  $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$ .

#### Példa

Legyen  $A$  a tükrözés az  $y = x$  egyenesre. Mi lesz  $\det(A - \lambda I)$ ?

Leképezés determinánása a mátrixának a determinánása.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így  $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$ , ezek  $A$  sajátértékei.

## A karakterisztikus polinom

### Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$  az  $A$  karakterisztikus polinomja.

### Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$ , az  $M$  karakterisztikus polinomja  $k_M = \det(M - xE)$ , és ennek gyöktényezőss alakja  $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ .

- (1) A  $k_M$  tényleg  $n$ -edfokú polinom  $(-1)^n$  főegyütthatóval.
- (2) A  $k_M$  karakterisztikus polinom gyökei az  $M$  sajátértékei.
- (3) A sajátértékek összege,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$  az  $M$  mátrix nyoma, vagyis az  $M$  főátlójában álló elemek összege.  
Ez a  $k_M$  polinomban  $x^{n-1}$  együtthatójának  $(-1)^{n-1}$ -szerese.
- (4) A sajátértékek szorzata  $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(M)$ .  
Ez a  $k_M$  polinom konstans tagja.

## Példák karakterisztikus polinomra

Legyen  $A$  a síkon az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak  $\alpha = k180^\circ$  esetén van ( $k$  egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei  $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$ , azaz komplex sajátértékek! Az  $A$  mátrixának nyoma  $2 \cos \alpha$ , determinánsa 1.

$$\text{Legyen } M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Ekkor } k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ 1 & -1 - x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2. \text{ Tehát } 2 \text{ az egyetlen sajátérték. Ez kétszeres gyöke } k_M\text{-nek! Nyom} = 2 + 2, \text{ determináns} = 2 \cdot 2.$$

## A sajátvektorok meghatározása

Legyen  $A$  a tükrözés az  $y = x$  egyenesre. Mik  $A$  sajátvektorai?

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra  $A(v) = 1 \cdot v$  és  $A(v) = (-1) \cdot v$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok  $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (ahol  $r$  valós,  $r \neq 0$ ).

Ugyanígy a  $-1$ -hez tartozó sajátvektorok  $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  ( $r \neq 0$ ).

Sajátvektorokból álló bázis:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Ebben  $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

### Hasonlóság és sajátértékek

#### Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

#### Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

#### Bizonyítás

Ha  $M$  és  $N$  hasonló, akkor van olyan  $A$  lineáris transzformáció, és  $\mathbf{b}, \mathbf{d}$  bázisok, hogy  $[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = M$  és  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = N$ . Ezért  $k_M(x) = k_A(x) = k_N(x)$ .  $\square$

HF az állítást a bázistranszformáció képletéből levezetni.

## 5. Összefoglaló

### A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

#### Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

#### Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzése mátrixokra és transzformációkra. A balinverz jobbinverz is véges dimenzióban. A sajátértékek a kar. pol. gyökei. A mátrix nyomának és determinánsának kapcsolata a sajátértékekkel és a kar. pol. együtthatóival. Hasonló mátrixok kar. polinomja egyenlő.