

1. A dimenzió

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

b_1, \dots, b_n pontosan akkor bázis V -ben, ha V minden eleme *egyértelműen* fölírható a b_1, \dots, b_n lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható \iff generátorrendszer (nyilván).

Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \dots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\forall j \lambda_j = 0$.

Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor innen $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt $\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j -re (tehát egyértelmű). \square

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy *koordinátarendszert* vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \dots, b_n) \in V$ bázis.

Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$, akkor

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n \text{ a } v \text{ koordinátavektora ebben a bázisban.}$$

A koordinátázás haszna

A keletkező T^n -beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel, amik bonyolult dolgok (például függvények, geometriai transzformációk) is lehetnek.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Persze B' „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon, hiszen $1 + i$ nem merőleges i -re.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis \mathbb{C} -ben \mathbb{R} fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?

$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész: $x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer. Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4 + i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.

Bázistranszformáció: ha egy bázist másikra cserélünk, akkor hogyan változik egy vektor koordinátavektora? Képlet: később.

Független \leq generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: *tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.*

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként:

$f_j = \lambda_{j1}g_1 + \dots + \lambda_{jk}g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$ -re). Tekintsük a

$\lambda_{1i}x_1 + \dots + \lambda_{ni}x_n = 0$ ($1 \leq i \leq k$) lineáris egyenletrendszert.

Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből). De erre a megoldásra $x_1f_1 + \dots + x_nf_n = 0$, ellentmondás, hiszen f_1, \dots, f_n lineárisan független. \square

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.

(Ez az elemszám a vektortér *dimenziója*, $\dim(V)$).

Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.

Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma. B_1 és B_2 -t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$. Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.

Legyen B egy rögzített bázis V -ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.

Ha F független, akkor $|F| \leq |B|$, mert B generátorrendszer.

Ha G generátorrendszer, akkor $|G| \geq |B|$, mert B független. \square

2. Függés és függetlenség

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.

$v_1, \dots, v_m \in V$ *lineárisan összefüggő*, ha *nem* lineárisan független.

$v \in V$ *lineárisan függ* v_1, \dots, v_m -től, ha felírható v_1, \dots, v_m lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Nyilván v_1, \dots, v_m akkor és csak akkor generátorrendszer V -ben, ha V minden vektora függ tőle.

Állítás (F4.4.3. Tétel)

- (1) Független rendszer része is független. (HF)
- (2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

Az üres halmaz lineárisan független! Ezért $\dim(\{0\}) = 0$.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ v_1, \dots, v_m -től, akkor v_1, \dots, v_m, v összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együtttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha v_1, \dots, v_m lineárisan összefüggő, akkor *VAN közöttük olyan*, amely lineárisan függ a többiektől.

Az *nem igaz*, hogy *mindegyik* függ a többiektől! Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0 -tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$ -ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.

Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. \square

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha v_1, \dots, v_m független, de v_1, \dots, v_m, v összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ v_1, \dots, v_m -től.

Bizonyítás

Mivel v_1, \dots, v_m, v összefüggő, van olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$. Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.

De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor v_1, \dots, v_m lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll). Ezért v kifejezhető, azaz függ v_1, \dots, v_m -től. \square

3. A bázis jellemzései

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen \mathcal{H} halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).

Az $L \in \mathcal{H}$ *legnagyobb* elem, ha \mathcal{H} minden elemét tartalmazza.

Az $L \in \mathcal{H}$ *legsűkebb* elem, ha \mathcal{H} minden elemének része.

Az $M \in \mathcal{H}$ *maximális* elem, ha nincs \mathcal{H} -ban M -et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.

Az $M \in \mathcal{H}$ *minimális* elem, ha nincs \mathcal{H} -ban olyan halmaz, ami M -nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$.

Legnagyobb elem nincs, $\{1, 2, 3\}$ és $\{3, 4\}$ a maximális elemek.

Legsűkebb eleme van, az üres halmaz, és ez minimális is.

Ha egy elem legnagyobb, akkor maximális is, de fordítva nem.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A b_1, \dots, b_n akkor és csak akkor *bázis* a V vektortérben, ha *maximális* független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha b_1, \dots, b_n *bázis*, akkor *maximális független*.

Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ b_1, \dots, b_n -től, mert b_1, \dots, b_n generátorrendszer. Ezért b_1, \dots, b_n, v összefüggő, azaz b_1, \dots, b_n maximális független.

Ha b_1, \dots, b_n *maximális független*, akkor *generátorrendszer* is.

Valóban, ha $v \in V$, akkor b_1, \dots, b_n, v már összefüggő. De b_1, \dots, b_n független, így a 2. Lemma miatt v függ b_1, \dots, b_n -től. Ezért b_1, \dots, b_n generátorrendszer is. \square

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A b_1, \dots, b_n akkor és csak akkor *bázis* a V vektortérben, ha *minimális* generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha b_1, \dots, b_n *minimális generátorrendszer*, akkor *független* is.

Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i , mondjuk b_1 függene a többiektől. Azaz $b_1 \in \langle b_2, \dots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ a „legsűkebb” $\{b_1, \dots, b_n\}$ -et tartalmazó altér). De $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$, és így $V \subseteq W = \langle b_2, \dots, b_n \rangle$. Így b_2, \dots, b_n generátorrendszer, ami ellentmond b_1, \dots, b_n minimalitásának. \square

Bázis = minimális generátorrendszer

Bizonyítás (másik irány)

Ha b_1, \dots, b_n *bázis*, akkor *minimális generátorrendszer*.

Valóban, ha például b_1 -et elhagyjuk, akkor b_2, \dots, b_n már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor b_1, \dots, b_n összefüggene. Ezért b_1, \dots, b_n minimális generátorrendszer.

Megjegyzés: Így minden minimális generátorrendszer elemszáma, és minden maximális független rendszer elemszáma ugyanaz: a vektortér dimenziója.

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz. Ez legfeljebb dimenziónyi számú lépésben véget ér.

Következmény (F4.5.6. Tétel)

Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bizonyítás

Hagyjunk el belőle, míg minimális generátorrendszer nem lesz.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W *valódi*, vagyis az egész V -től különböző *altér*. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma \leq generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$.

Ekkor W -ben minden független rendszer független V -ben is, ezért legfeljebb n elemű. Így W -ben van maximális független b_1, \dots, b_m rendszer, ami tehát bázis W -ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.

Ha $m = n$, akkor b_1, \dots, b_m maximális független rendszer V -ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer V -ben is, de W -ben is. Ezért az általa generált altér W is és V is, azaz $W = V$. \square

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer *rangja* az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r , ha van közöttük r darab lineárisan független, de r -nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X -ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő. A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F -től. Ezért $\langle F \rangle$ egy X -et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X \rangle$ -et. Vagyis F bázis $\langle X \rangle$ -ben, és így F elemszáma az X rangja.

Azaz a rang a maximális függetlenek elemszáma. Jele: $r(X)$.

4. Alterek összege

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$. Azaz $U + W$ zárt az összeadásra.

A λ -szorosra való zártság bizonyítása hasonló: HF. \square

$U + W$ a legszűkebb U -t és W -t tartalmazó altér. Hiszen minden ilyen altér tartalmazza az $u + w$ alakú összegeket.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.
 $U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke. Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$. $U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.
 $U \cap W$ a diagonális mátrixok.

HF*: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

5. Skaláris szorzat

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = v^T w$.

$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jele: $v \perp w$.

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. (Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

Állítás (F8.1. szakasz, HF)

Tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ és $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$;

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ és $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A b_1, \dots, b_n ortonormált bázis, ONB \mathbb{R}^n -ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i -re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$. (Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \dots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor b_i -vel skalárisan szorozva

$$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \lambda_i. \quad \square$$

6. Összefoglaló

A 2. előadáshoz tartozó vizsganyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma \leq generátorrendszer elemszáma.

$|\text{Független}| \leq \text{dimenzió}$. $|\text{Generátorrendszer}| \geq \text{dimenzió}$.

A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma. A bázis maximális független, minimális generátorrendszer. Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója. Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma. Alterek összegének dimenziója. Vektor koordinátái ONB-ben.