

Algebra2, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewwkiss@gmail.com

8. előadás

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.

Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda$,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós
(hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).
 A felcserélhető önmagával

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Unitér \iff normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1 .

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha **normális**,
és minden (komplex feletti) sajátértéke **valós**.

Bizonyítás: Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós
(hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).

A felcserélhető önmagával így $A^* = A \implies A$ normális. □

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.

Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett)
ortonormált bázisban,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) **ortonormált bázisban**, ha szimmetrikus.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) **ortonormált bázisban**, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_b$ diagonális,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) **ortonormált bázisban**, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_b$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) **ortonormált bázisban**, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_b$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis **szimmetrikus mátrix**.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) **ortonormált bázisban**, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció.

A megfordítást a 9. előadáson bizonyítjuk.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete?**

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$:

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete?**

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete?**

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete?**

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$:

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit.**

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit.**

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} :

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit.**

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} : **indefinit.**

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit.**

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit.**

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} : **indefinit.**

Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b -re

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit**.

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit**.

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} : **indefinit**.

Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b -re
(mert az együtthatóvektorok $(1, 1)$ és $(1, -1)$ bázist alkotnak),

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit**.

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit**.

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} : **indefinit**.

Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b -re
(mert az együtthatóvektorok $(1, 1)$ és $(1, -1)$ bázist alkotnak),
így $Q(x, y) = (5/4)a^2 - (1/4)b^2$,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
 $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az **értékkészlete**?

$$Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2) \frac{(x+y)^2}{2} - (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: **pozitív definit**.

$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y -ra, $Q_2(1, -1) = 0$: **pozitív szemidefinit**.

$Q_3(x, y)$ értékkészlete \mathbb{R} : **indefinit**.

Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b -re
(mert az együtthatóvektorok $(1, 1)$ és $(1, -1)$ bázist alkotnak),
így $Q(x, y) = (5/4)a^2 - (1/4)b^2$, ami minden valós értéket felvesz.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$v^T M_1 v$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$v^T M_1 v = [x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$v^T M_1 v = [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \quad y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) \end{aligned}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \quad y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 \end{aligned}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \quad y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$,

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 **szimmetrikus** mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}$.

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$,

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}$.

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 **szimmetrikus** mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}$.

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.

M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 **szimmetrikus** mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}$.

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.

M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\begin{aligned} v^T M_1 v &= [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} = \\ &= x(x + (y/2)) + y((x/2) + y) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y). \end{aligned}$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle u, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 **szimmetrikus** mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2) \frac{(x+y)^2}{2} + (1/2) \frac{(x-y)^2}{2}$.

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.

M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Ezek komponensei adják x és y együtthatóit a négyzetösszegben.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2.$

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$,

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható **szimmetrikus** mátrixszal is:

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható **szimmetrikus** mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható **szimmetrikus** mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$,

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható **szimmetrikus** mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható **szimmetrikus** mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás **mátrixszorzással:**

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j, \text{ ahol } r_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható **szimmetrikus** mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás **mátrixszorzással:** $Q = v^T M v$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w,$$

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban **összevonva** r_{ij} ,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban **összevonva** r_{ij} , akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$.

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban **összevonva** r_{ij} , akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T Mw, \text{ így}$$

$$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T Mv \text{ (HF).}$$

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban **összevonva** r_{ij} , akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Minden (valós) kvadratikus alak **egyértelműen** felírható $\langle v, Mv \rangle = v^T Mv$ alakban, ahol M **szimmetrikus** mátrix.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$
a hozzá tartozó kvadratikus alak.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengeteltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengeteltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengeteltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
 $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$
a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt
van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
 $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.
De $\langle b_1, Mv \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
 $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.
De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\text{De } \langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \langle b_1, Mv \rangle &= \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ &= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle \end{aligned}$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \langle b_1, Mv \rangle &= \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ &= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle \end{aligned}$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \langle b_1, Mv \rangle &= \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ &= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1, \end{aligned}$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \langle b_1, Mv \rangle &= \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ &= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1, \end{aligned}$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \langle b_1, Mv \rangle &= \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ &= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1, \end{aligned}$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{De } \langle b_1, Mv \rangle &= \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ &= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1, \end{aligned}$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$
 $= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1,$
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$
 $= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1,$
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\text{De } \langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1,$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

$$\text{Legyen } v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\text{De } \langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ = \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1,$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

$$\text{Legyen } v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt

van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

$$\text{De } \langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \\ = \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1,$$

hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

$$\text{Legyen } v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1$, hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle = b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1$, hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle = b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2$. Azaz

$$Q(x_1, x_2) = \lambda_1 (b_{11} x_1 + b_{21} x_2)^2 + \lambda_2 (b_{12} x_1 + b_{22} x_2)^2$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengetéltétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle.$$

De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle = \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1$, hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle = b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2$. Azaz

$$Q(x_1, x_2) = \lambda_1 (b_{11} x_1 + b_{21} x_2)^2 + \lambda_2 (b_{12} x_1 + b_{22} x_2)^2$$

HF: Ugyanezt a számolást végezzük el $n \times n$ -es mátrixra.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda,$$

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak. Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.

Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei,

a $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ négyzetösszeg alakja tehát

$$-1 \left(\frac{-x + y + z}{\sqrt{3}} \right)^2 + 0 \left(\frac{-y + z}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{2x + y + z}{\sqrt{6}} \right)^2.$$

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek $-1, 0, 2$, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.

Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei,

a $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ négyzetösszeg alakja tehát

$$-1 \left(\frac{-x + y + z}{\sqrt{3}} \right)^2 + 0 \left(\frac{-y + z}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{2x + y + z}{\sqrt{6}} \right)^2.$$

Ellenőrzés: A műveletek elvégzésével azonosságot kapunk.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q **negatív szemidefinit**,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q **negatív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q **negatív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékére nempozitív, és van közte 0.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q **negatív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékére nempozitív, és van közte 0.)
- (5) Q **indefinit**,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q **negatív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékére nempozitív, és van közte 0.)
- (5) Q **indefinit**, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, M v \rangle$).

- (1) Q **pozitív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)
- (2) Q **negatív definit**, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)
- (3) Q **pozitív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)
- (4) Q **negatív szemidefinit**, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékére nempozitív, és van közte 0.)
- (5) Q **indefinit**, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.
(Az M mátrixnak van pozitív és van negatív sajátértéke is.)

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0, d_2 > 0,$

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0, d_2 > 0, d_3 < 0,$

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k **páros** és $d_k < 0$ ha k **páratlan**.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k **páros** és $d_k < 0$ ha k **páratlan**.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k **páros** és $d_k < 0$ ha k **páratlan**.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k **páros** és $d_k < 0$ ha k **páratlan**.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

A Q_1 pozitív definit, mert $1 > 0$

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven **minor**) determinánsát.

- (1) A Q pontosan akkor **pozitív definit**, ha minden $d_k > 0$.
- (2) A Q pontosan akkor **negatív definit**, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

A Q_1 pozitív definit, mert $1 > 0$ és $\det(M_1) = 3/4 > 0$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.

Ez akkor teljesül, ha $a > 0$

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Diagonalizáljuk M -et ONB-ben,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Diagonalizáljuk M -et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ .

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Diagonalizáljuk M -et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ .

Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Diagonalizáljuk M -et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ .

Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.

Ez akkor ellipszis, ha λ és μ pozitív.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Ha a bal oldali kvadratikus alak

- (1) pozitív definit, akkor a görbe **ellipszis**.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.
- (2) indefinit, akkor a görbe **hiperbola**.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Diagonalizáljuk M -et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ .

Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.

Ez akkor ellipszis, ha λ és μ pozitív.

Az λ és μ akkor ellentétes előjelű, ha $\det(M) = \lambda\mu < 0$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak:

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix},$$

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv$,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7|x_2|^2$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7|x_2|^2$.

Q értékészlete valós,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 |x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7|x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,
 $i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7|x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,
 $i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

A fenti M mátrix **önadjungált**, azaz $M^* = M$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \bar{x}_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_1 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 \bar{x}_2 x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}, \text{ ekkor } Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv,$$

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1 + 7 |x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,
 $i \bar{x}_1 x_2 - i \bar{x}_2 x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

A fenti M mátrix **önadjungált**, azaz $M^* = M$.

Tétel (F7.4. szakasz, HF)

$Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ értékészlete valós $\iff M$ önadjungált.

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Értelmes, mert Q értékészlete valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Értelmes, mert Q értékészlete valós.

- (2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Értelmes, mert Q értékészlete valós.

- (2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.

Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Értelmes, mert Q értékészlete valós.

- (2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.

Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

- (3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Értelmes, mert Q értékészlete valós.

- (2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.

Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

- (3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.

Értelmes, mert önadjungált mátrix determinánusa valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^* M v = \langle v, M v \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

- (1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Értelmes, mert Q értékészlete valós.

- (2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.

Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

- (3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.

Értelmes, mert önadjungált mátrix determinánusa valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Általános komplex kvadratikus alak karakteréről nem beszélhetünk.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

$$(1) \quad B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w).$$

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.
- (4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.
- (4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.
- (5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.
- (4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.
- (5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$
(azaz B szimmetrikus).

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.
- (4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.
- (5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$
(azaz B szimmetrikus).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

- (1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.
- (2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.
- (3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.
- (4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.
- (5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$
(azaz B szimmetrikus).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása
(ott M az egységmátrix).

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény.

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re.

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak**

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).

A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re.

$Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,
$$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,
 $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,
 $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,

$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,

$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$, továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$.

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,

$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$, továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$.

A B pontosan akkor szimmetrikus,

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és B kétváltozós, V -n értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. A B függvény **bilineáris**, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság). A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w -re. $Q(v) = B(v, v)$ a B -hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \rightarrow \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben,
 $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus, ha $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ minden i, j -re.

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben.

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény,

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén

$B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál,

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).

A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható,

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B -t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1). A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható, és ezek között pontosan **egy** lesz szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,
 B bilineáris függvény V -n,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,
 B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,

akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,

akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert \mathbf{b} ONB.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert \mathbf{b} ONB.

Legyen $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert \mathbf{b} ONB.

Legyen $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,

B bilineáris függvény V -n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

és A az a lineáris transzformáció V -n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű

a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

B akkor és csak akkor **szimmetrikus**, ha M szimmetrikus,

akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert \mathbf{b} ONB.

Legyen $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Ekkor $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$. □

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda} B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$,

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis **minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.**

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis **minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.**

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B **Hermite-féle**:

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis **minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.**

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B **Hermite-féle**: minden $v, w \in V$ -re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j$.

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis **minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.**

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B **Hermite-féle**: minden $v, w \in V$ -re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$. Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa **önadjungált**,

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis **minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.**

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B **Hermite-féle**: minden $v, w \in V$ -re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa **önadjungált**,

vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$,

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \bar{\lambda}B(v, w)$.

Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i y_j$ és

$$Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

Itt $\bar{x}_i x_j \neq \bar{x}_j x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis **minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.**

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$

kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós,

ha B **Hermite-féle**: minden $v, w \in V$ -re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa **önadjungált**,

vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$, ahol A önadjungált transzformáció.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak,

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális,

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális,

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, bilineáris függvény.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B -ortogonális bázis.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B -ortogonális bázis.

Ha V euklideszi tér, akkor van B -ortogonális ONB is.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B -ortogonális bázis.

Ha V euklideszi tér, akkor van B -ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B -ortogonális bázis.

Ha V euklideszi tér, akkor van B -ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

Módosított Gauss-elimináció,

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B -ortogonális bázis.

Ha V euklideszi tér, akkor van B -ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.

B -ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

A $v, w \in V$ vektorok B -ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis B -ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

A b_1, \dots, b_n bázis nyilván pontosan akkor B -ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B -ortogonális bázis.

Ha V euklideszi tér, akkor van B -ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.

B -ortogonális ONB keresése: sajátértékek segítségével.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus,
bilineáris függvény,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re;

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált). Ekkor A ONB-ben diagonalizálható

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált). Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált). Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel). Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált). Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel). Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetyétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle$

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. A főátló elemei $B(b_i, b_i) = \lambda_i$. □

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \text{Hom}(V)$ -re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengetytétel).

Legyen b_1, \dots, b_n ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B -ortogonális, azaz B -nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. A főátló elemei $B(b_i, b_i) = \lambda_i$. □

E bázisban a B -hez tartozó kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -tól függ,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j)$

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1)$

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.

Így a főátló elemeinek **nagysága** megváltozhat

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.

Így a főátló elemeinek **nagysága** megváltozhat (de az előjele nem).

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B -ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B -tól függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen b_1, \dots, b_n egy B -ortogonális bázis.

Ha b_1 helyett $-2b_1$ -et veszünk, akkor is B -ortogonális marad,

mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.

Így a főátló elemeinek **nagysága** megváltozhat (de az előjele nem).

HF (F7.2.5. Tétel): elérhető, hogy a főátlóban csak 0 , 1 , -1 álljon.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak:

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak:
megadása skaláris szorzattal

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.

Bilineáris függvény:

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus,

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.
Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékészlete valós.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről,

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról. B -ortogonális bázis, illetve ONB létezése;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról. B -ortogonális bázis, illetve ONB létezése; négyzetösszeg alak.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B -ortogonalitás.

Tételek

Önadjungált \iff normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról. B -ortogonális bázis, illetve ONB létezése; négyzetösszeg alak. Sylvester tehetetlenségi tétele.