

# Algebra2, normál

## ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil  
ewwkiss@gmail.com

3. előadás

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**,

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;  
**skalárszorostartó**,

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .



# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába,

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába,

azaz  $A(0_V) = 0_W$

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz,

azaz  $A(0_V) = 0_W$

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz,

azaz  $A(0_V) = 0_W$  és  $A(-v) = -A(v)$ .

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz,

azaz  $A(0_V) = 0_W$  és  $A(-v) = -A(v)$ .

## Bizonyítási ötlet az első állításra

$$A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V),$$

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz,

azaz  $A(0_V) = 0_W$  és  $A(-v) = -A(v)$ .

## Bizonyítási ötlet az első állításra

$$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V),$$

# A lineáris leképezés fogalma

## Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek **UGYANAZON**  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  **lineáris leképezés**, ha

**összegtartó**, azaz  $v_1, v_2 \in V$  esetén  $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ ;

**skalárszorostartó**, azaz  $v \in V$  és  $\lambda \in T$  esetén  $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ .

Az  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezések halmaza  $\text{Hom}(V, W)$ .

## Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz, azaz  $A(0_V) = 0_W$  és  $A(-v) = -A(v)$ .

## Bizonyítási ötlet az első állításra

$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V)$ , adjunk hozzá  $-A(0_V)$ -t.

# Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi



## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.



## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**,

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**, jele  $0$ .



## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**, jele  $0$ .
- (7)  $V = W$  tetszőleges vektortér,

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**, jele  $0$ .
- (7)  $V = W$  tetszőleges vektortér,  $A(v) = v$ .

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**, jele  $0$ .
- (7)  $V = W$  tetszőleges vektortér,  $A(v) = v$ .  
Ez az **identikus leképezés**,

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**, jele  $0$ .
- (7)  $V = W$  tetszőleges vektortér,  $A(v) = v$ .  
Ez az **identikus leképezés**, jele  $I$

## Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2)  $V = T^n$  és  $W = T^m$  a  $T$  fölött,  $M \in T^{m \times n}$  rögzített mátrix.  
Legyen  $A(v) = Mv$ .
- (3)  $V = W = T[x]$  a  $T$  fölött,  $A(p) = p'$  (a  $p$  polinom deriváltja).
- (4)  $V = \mathbb{R}[x]$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $W = \mathbb{R}$  önmaga fölött.  
 $A(p) = p(3)$  (az 3 szám behelyettesítése).
- (5)  $V$  vektortér  $T$  fölött,  $W = T^n$  a  $T$  test fölött.  
 $B = (b_1, \dots, b_n)$  rögzített bázis  $V$ -ben és  $A(v) = [v]_B$ .
- (6)  $V$  és  $W$  tetszőleges vektorterek  $T$  fölött,  $A(v) = 0_W$ .  
Ez a **nulla leképezés**, jele  $0$ .
- (7)  $V = W$  tetszőleges vektortér,  $A(v) = v$ .  
Ez az **identikus leképezés**, jele  $I$  vagy  $I_V$ .

# Tükrözés egyenesre

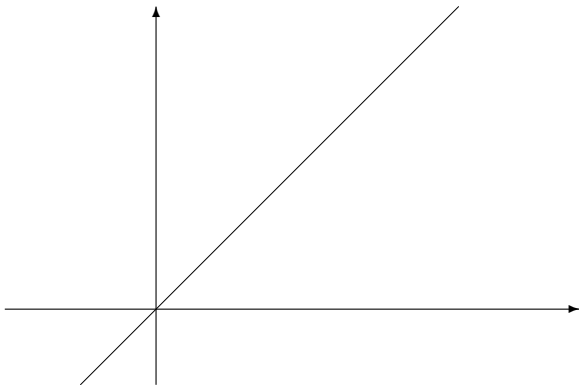
## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

# Tükrözés egyenesre

## Példa

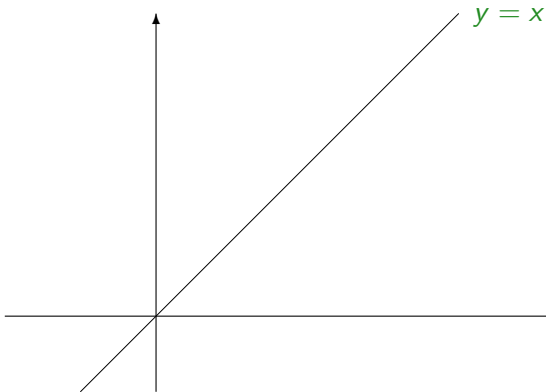
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

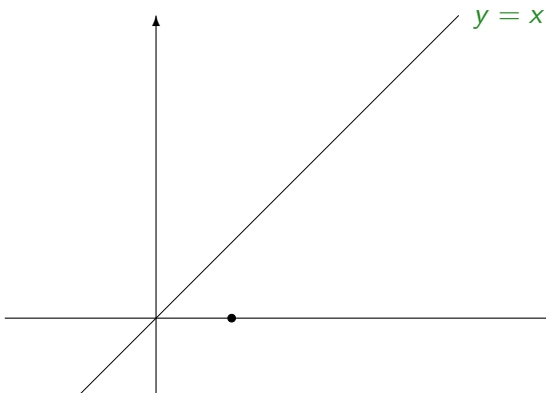




# Tükrözés egyenesre

## Példa

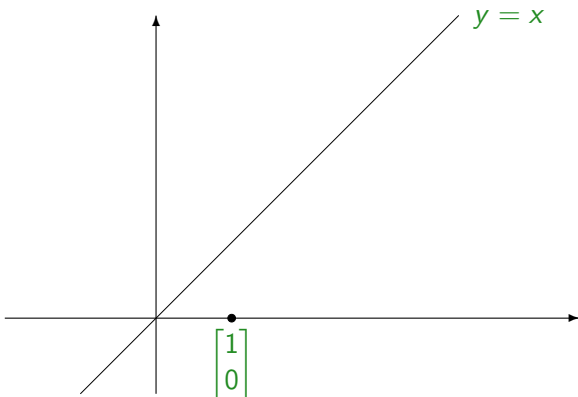
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

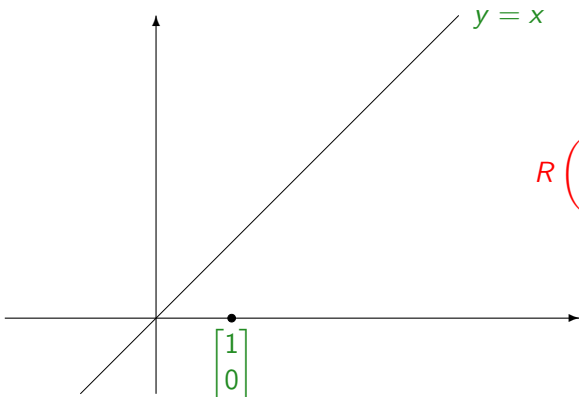
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

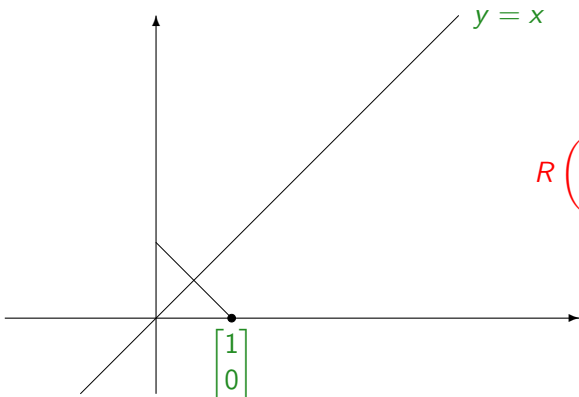


$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

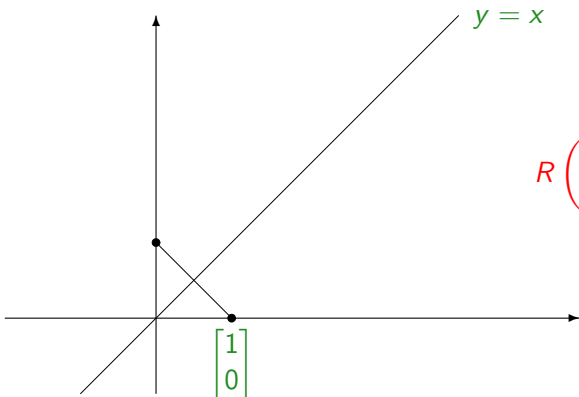


$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

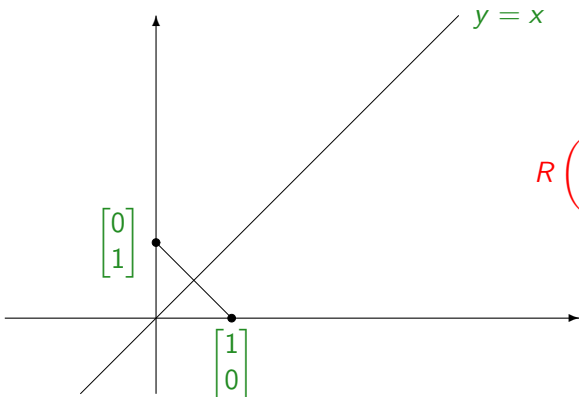


$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

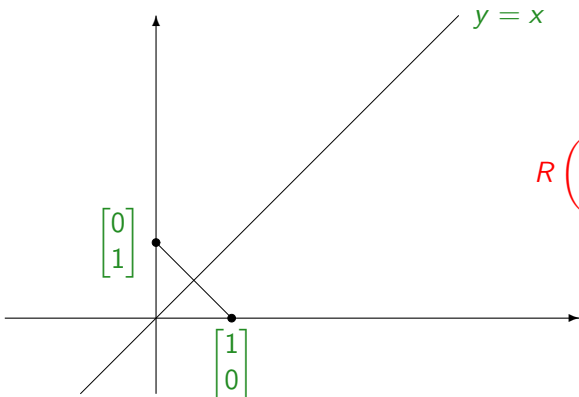


$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

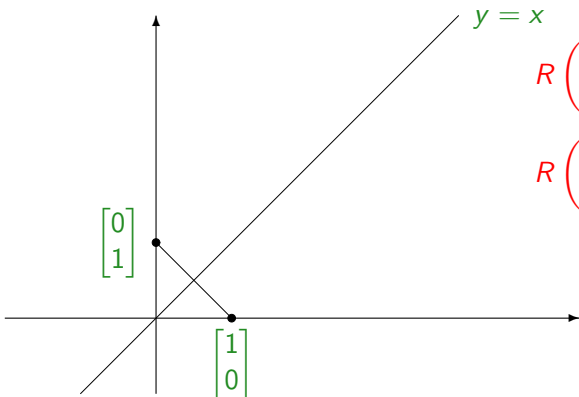


$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



$$R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

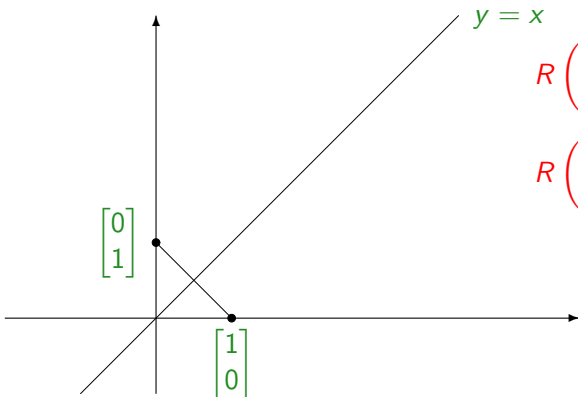
$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



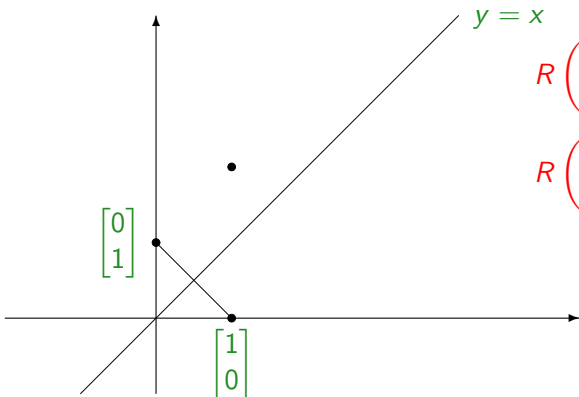
$$R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



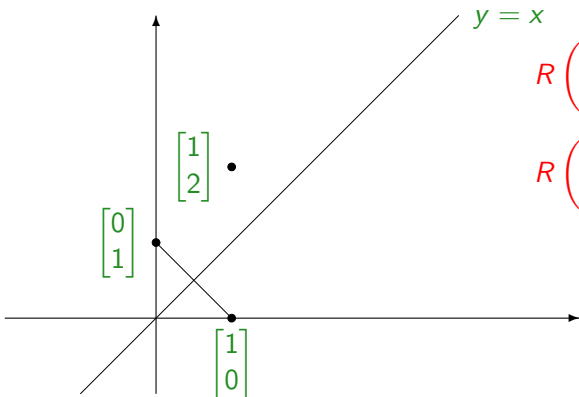
$$R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



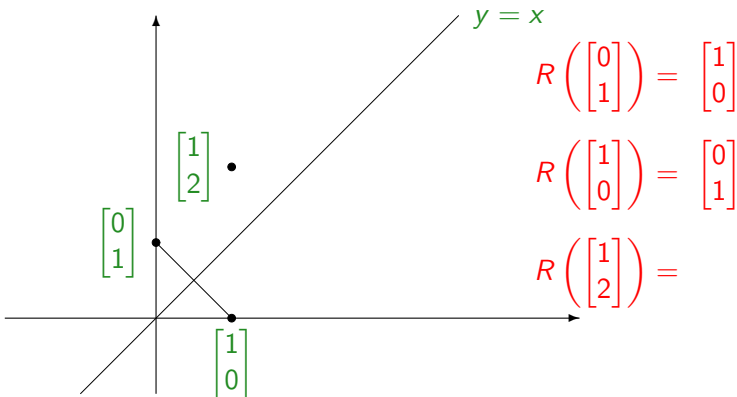
$$R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Tükrözés egyenesre

## Példa

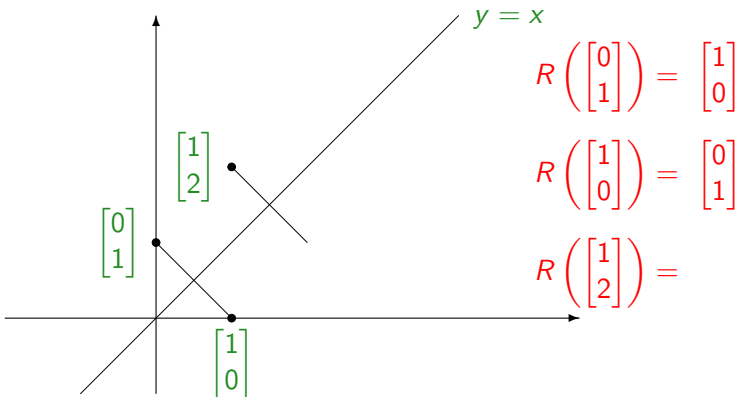
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

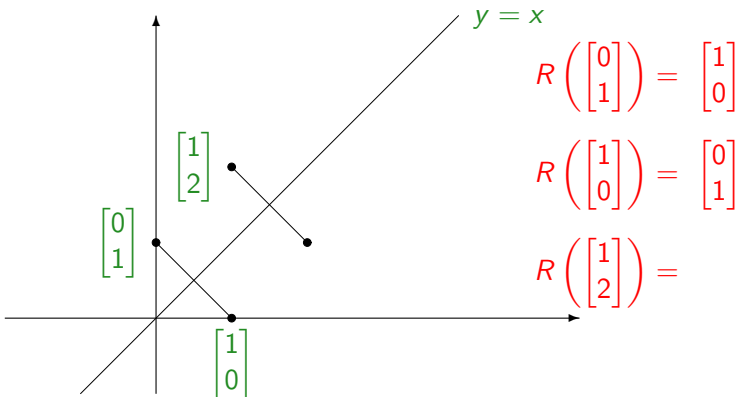
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

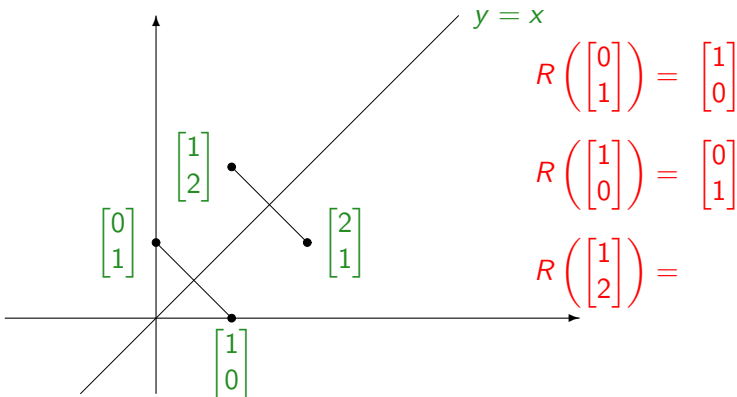
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

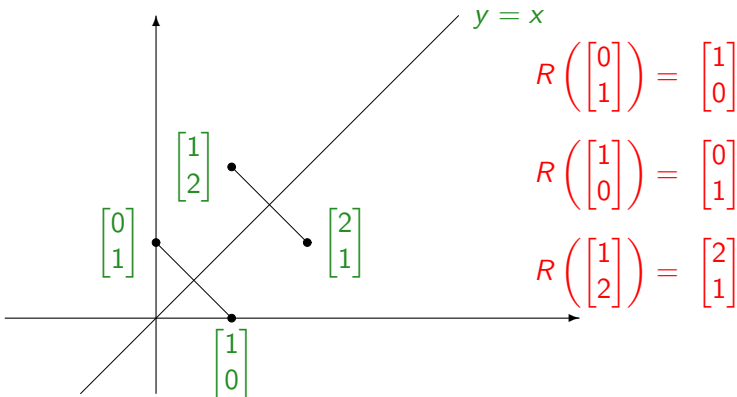
Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.



# Tükrözés egyenesre

## Példa

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.





# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) =$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \right)$$



# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) =$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**.

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  összegtartó. A skalárszoros-tartás miatt ez

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$



# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yR \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yR \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yR \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yR \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yR \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# A tükrözés képlete

## Kérdés

Legyen  $R$  az  $y = x$  egyenesre való tükrözés.  $R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

Láttuk:  $R \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ezért

$$R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = R \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $R$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} R \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + R \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xR \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yR \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

$$\text{Ha } A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

$$\text{Ha } A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) +$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) =$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right),$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  és  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ , akkor  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \left( \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

hiszen  $A$  összegtartó.



# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right),$$

hiszen  $A$  összegtartó. A skalárszoros-tartás miatt ez

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right),$$

hiszen  $A$  összegtartó. A skalárszoros-tartás miatt ez

$$A\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) +$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$A\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= xA\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yA\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= x\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

## Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \end{aligned}$$



# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát **minden vektor képét ki tudjuk számolni**,

# Vektor képe általános transzformációnál

## Kérdés

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

Ha  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  és  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ , akkor  $A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen  $A$  **összegtartó**. A **skalárszoros-tartás** miatt ez

$$\begin{aligned} A \left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left( y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát **minden vektor képét ki tudjuk számolni**, ha ismerjük  $a, b, c, d$  értékét.

# Lineáris transzformáció mátrixa

Láttuk

Legyen  $A : T^2 \rightarrow T^2$  lineáris transzformáció.

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A : T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$



# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ .

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  képei.)

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} \text{ (így lehet kiszámolni egy vektor képét).}$$

# Lineáris transzformáció mátrixa

## Láttuk

Legyen  $A: T^2 \rightarrow T^2$  **lineáris transzformáció**. Ha

$$A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

## Definíció

A fenti  $A$  **mátrixa**  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . (Az oszlopok  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} \text{ (így lehet kiszámolni egy vektor képét).}$$

Azaz  $A(v) = [A]v$ .



# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:**

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .



# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ .

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ .

A második:

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ .

A második:  $i(\cos \alpha + i \sin \alpha) =$

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ .

A második:  $i(\cos \alpha + i \sin \alpha) = -\sin \alpha + i \cos \alpha$

# A forgatás mátrixa

## Példa

Az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa  $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

**Komplex számokkal:** ez a forgatás szorzás  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

Az  $x + iy$  számnak az  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  felel meg:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$ .

A  $[F]$  első oszlopa:  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ .

A második:  $i(\cos \alpha + i \sin \alpha) = -\sin \alpha + i \cos \alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

# Mátrix bázispárban

Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,



# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés,

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[ [A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}$ .

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[ [A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}$ .

$A$  mátrix  $j$ -edik oszlopába  $A(b_j)$  koordinátáit írjuk a  $\mathbf{d}$  bázisban.

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[ [A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}$ .

$A$  mátrix  $j$ -edik oszlopába  $A(b_j)$  koordinátáit írjuk a  $\mathbf{d}$  bázisban.

Azaz  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$  azt jelenti, hogy

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[ [A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}$ .

$A$  mátrix  $j$ -edik oszlopába  $A(b_j)$  koordinátáit írjuk a  $\mathbf{d}$  bázisban.

Azaz  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$  azt jelenti, hogy

$$A(b_1) = \lambda_{11}d_1 + \dots + \lambda_{m1}d_m,$$

# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[ [A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}$ .

$A$  mátrix  $j$ -edik oszlopába  $A(b_j)$  koordinátáit írjuk a  $\mathbf{d}$  bázisban.

Azaz  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$  azt jelenti, hogy

$$A(b_1) = \lambda_{11}d_1 + \dots + \lambda_{m1}d_m,$$

$\dots,$

$$A(b_n) = \lambda_{1n}d_1 + \dots + \lambda_{mn}d_m.$$



# Mátrix bázispárban

## Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$  bázis  $W$ -ben.

Ha  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés, akkor  $A$  **mátrixa**

a  $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$  bázispárban  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[ [A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}$ .

$A$  mátrix  $j$ -edik oszlopába  $A(b_j)$  koordinátáit írjuk a  $\mathbf{d}$  bázisban.

Azaz  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$  azt jelenti, hogy

$$A(b_1) = \lambda_{11}d_1 + \dots + \lambda_{m1}d_m,$$

$\dots,$

$$A(b_n) = \lambda_{1n}d_1 + \dots + \lambda_{mn}d_m.$$

Az előbbi példákban a sík szokásos bázisa szerepelt.

# Vektor képeinek kiszámítása

Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$   
és  $v \in V$ .

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$   
és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$   
és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$   
és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).



# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ .

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} =$$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} =$$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk:  $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) =$

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk:  $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \dots + \mu_n A(b_n)$ ,

# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk:  $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \dots + \mu_n A(b_n)$ ,  
és  $A(b_j) = \lambda_{1j} d_1 + \dots + \lambda_{mj} d_m$ .



# Vektor képének kiszámítása

## Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $v \in V$ . Ekkor  $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$ .

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Bizonyítás

Legyen  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$  és  $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$ . Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk:  $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \dots + \mu_n A(b_n)$ ,

és  $A(b_j) = \lambda_{1j} d_1 + \dots + \lambda_{mj} d_m$ . Behelyettesítve

$$A(v) = (\lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n)d_1 + \dots + (\lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n)d_m.$$

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk,

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre,

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal?

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal?  
Ez a két transzformáció **kompozíciója**

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto$$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) =$$



## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} =$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

$$F \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) =$$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

$$F \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

$$F \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} =$$

## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

$$F \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} =$$



## Példa kompozícióra

### Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

$$F \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

# Példa kompozícióra

## Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az  $y = x$  egyenesre, majd forgatunk az origó körül  $90^\circ$ -kal? Ez a két transzformáció **kompozíciója** (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel  $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ezért  $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$  képe

$$F \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

Az eredmény az  $y$ -tengelyre való tükrözés (**Házi Feladat**).

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk,

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  
 $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  
 $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:**

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t,

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

## Tétel

Ha  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ,



# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

## Tétel

Ha  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , és  $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ ,

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

## Tétel

Ha  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , és  $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ , akkor

$$[A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

## Tétel

Ha  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , és  $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ , akkor

$$[A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Tehát  $[A \circ B] = [A][B]$ :

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

## Tétel

Ha  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , és  $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ , akkor

$$[A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Tehát  $[A \circ B] = [A][B]$ : kompozíció mátrixa a mátrixok szorzata.

# A kompozíció mátrixa

## Definíció

Ha  $A, B : T^2 \rightarrow T^2$  transzformációk, akkor **kompozíciójuk**  $(A \circ B)(v) = A(B(v))$  tetszőleges  $v \in T^2$  esetén.

**Összetett függvény:** először  $B$ -t, utána  $A$ -t alkalmazzuk.

## Tétel

Ha  $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , és  $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ , akkor

$$[A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Tehát  $[A \circ B] = [A][B]$ : **kompozíció mátrixa a mátrixok szorzata.**

A mátrixok szorzását azért definiáltuk ezekkel a képletekkel, hogy ez az összefüggés igaz legyen.

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$



# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) =$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} =$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) =$$



# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} =$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  második oszlopa is megfelelő.

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  második oszlopa is megfelelő.

Példa:  $[F \circ R] =$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  második oszlopa is megfelelő.

Példa:  $[F \circ R] = [F][R] =$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  második oszlopa is megfelelő.

Példa:  $[F \circ R] = [F][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  második oszlopa is megfelelő.

Példa:  $[F \circ R] = [F][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$



# A kompozíció mátrixának kiszámítása

## Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

$$A \left( B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left( B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left( \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért  $A \circ B$  második oszlopa is megfelelő.

Példa:  $[F \circ R] = [F][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata**

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata**  
(kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u)$$

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u)$$

A kompozíció definíciója miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u))$$

A kompozíció definíciója miatt.



# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u))$$

$B$  skalárszoros-tartása miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u))$$

$B$  skalárszoros-tartása miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u))$$

$A$  skalárszoros-tartása miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u)) = \lambda A(B(u))$$

$A$  skalárszoros-tartása miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u)) = \lambda A(B(u))$$

A kompozíció definíciója miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u)) = \lambda A(B(u)) = \lambda AB(u).$$

A kompozíció definíciója miatt.

# Kompozíció az általános esetben

## Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek  $U$ ,  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.  
Az  $A : V \rightarrow W$  és a  $B : U \rightarrow V$  lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója)  $(AB)(u) = A(B(u))$  minden  $u \in U$ -ra.

## Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha  $A$  és  $B$  lineáris, akkor  $AB$  is az.

## Bizonyítás

$AB$  skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u)) = \lambda A(B(u)) = \lambda AB(u).$$

HF:  $AB$  összegtartó.

# Általános kompozíció mátrixa

Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,



# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ .

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor

$$[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}.$$

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).



# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Következmény

**Inverz** leképezés mátrixa a mátrix inverze:

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Következmény

**Inverz** leképezés mátrixa a mátrix inverze:  $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$ .

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze:  $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$ .

## Bizonyítás

$$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} =$$

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze:  $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$ .

## Bizonyítás

$$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}},$$

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze:  $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$ .

## Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$ , ami az egységmátrix.

# Általános kompozíció mátrixa

## Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen  $\mathbf{a}$  bázis  $U$ -ban,  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben,  
 $A \in \text{Hom}(V, W)$  és  $B \in \text{Hom}(U, V)$ . Ekkor  
 $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$ .

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése:  $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$  („kiesik” a  $\mathbf{b}$ ).

## Következmény

**Inverz** leképezés mátrixa a mátrix inverze:  $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$ .

## Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$ , ami az egységmátrix.  
Hasonlóan  $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}$  is az egységmátrix.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések



# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

(1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$(\lambda A)(u + v)$$

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$(\lambda A)(u + v)$$

A  $\lambda A$  definíciója miatt.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$(\lambda A)(u + v) = \lambda(A(u + v)) =$$

A  $\lambda A$  definíciója miatt.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$(\lambda A)(u + v) = \lambda(A(u + v)) =$$

Az  $A$  összegtartása miatt.



# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$(\lambda A)(u + v) = \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) =$$

Az  $A$  összegtartása miatt.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$(\lambda A)(u + v) = \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) =$$

A skalárral szorzás tulajdonsága (vektortéraxióma) miatt.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$\begin{aligned}(\lambda A)(u + v) &= \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) = \\ &= \lambda(A(u)) + \lambda(A(v))\end{aligned}$$

A skalárral szorzás tulajdonsága (vektortéraxióma) miatt.

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$\begin{aligned}(\lambda A)(u + v) &= \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) = \\ &= \lambda(A(u)) + \lambda(A(v))\end{aligned}$$

$A$   $\lambda A$  definíciója miatt (kétszer alkalmazva).

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$\begin{aligned}(\lambda A)(u + v) &= \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) = \\ &= \lambda(A(u)) + \lambda(A(v)) = (\lambda A)(u) + (\lambda A)(v).\end{aligned}$$

A  $\lambda A$  definíciója miatt (kétszer alkalmazva).

# Pontonkénti műveletek

## Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött,  
 $A, B : V \rightarrow W$  lineáris leképezések és  $\lambda \in T$ .

- (1)  $A$  és  $B$  összege  $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$  minden  $v \in V$ -re.
- (2)  $A$   $\lambda$ -szorosa  $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$  minden  $v \in V$ -re.

## Tétel (F5.1.3. Tétel)

$A + B$  és  $\lambda A$  is lineáris transzformáció.

## Mintabizonyítás: $\lambda A$ összegtartó

$$\begin{aligned}(\lambda A)(u + v) &= \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) = \\ &= \lambda(A(u)) + \lambda(A(v)) = (\lambda A)(u) + (\lambda A)(v).\end{aligned}$$

A másik három állítás HF.

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés összegtartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.



# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
összegtartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege.**

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
összegtartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege.**

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
összegtartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege.**

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ ,

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
összegtartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege.**

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$   
az  $A + B$  definíciója miatt.

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
összegtartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege.**

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$

az  $A + B$  definíciója miatt. Így

$$[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} =$$

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **összegtartó**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege**.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$

az  $A + B$  definíciója miatt. Így

$$[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}.$$

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **összegtartó**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege**.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$  az  $A + B$  definíciója miatt. Így

$$[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}.$$

Vagyis  $A + B$  mátrixának oszlopai az  $A$ , illetve a  $B$  mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei.

# Az összeg mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **összegtartó**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz **összeg mátrixa a mátrixok összege**.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  összegtartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$  az  $A + B$  definíciója miatt. Így

$$[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}.$$

Vagyis  $A + B$  mátrixának oszlopai az  $A$ , illetve a  $B$  mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei. A mátrixok összeadásának definíciója miatt tehát  $[A + B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} + [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ . □



# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **skalárszoros-tartó**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ ,

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés  
skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$   
a  $\lambda A$  definíciója miatt.

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$

a  $\lambda A$  definíciója miatt. Így

$$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} =$$

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$

a  $\lambda A$  definíciója miatt. Így

$$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}.$$



# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$   
a  $\lambda A$  definíciója miatt. Így

$$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}.$$

Vagyis  $\lambda A$  mátrixának oszlopai az  $A$  mátrixából vett megfelelő oszlopok  $\lambda$ -szorosai.

# A skalárszoros mátrixa

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés skalárszoros-tartó  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Azaz  $\lambda$ -szoros mátrixa a mátrix  $\lambda$ -szorosa.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  skalárszorostartó  $W$  és  $T^m$  között.

Ha  $A \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor  $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$   
a  $\lambda A$  definíciója miatt. Így

$$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}.$$

Vagyis  $\lambda A$  mátrixának oszlopai az  $A$  mátrixából vett megfelelő oszlopok  $\lambda$ -szorosai. A mátrixok  $\lambda$ -szorosának definíciója miatt tehát  $[\lambda A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \lambda [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ . □

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ ,

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés.

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .



# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra,

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra,  
és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B$

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra,  
és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra,  
és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  ( $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $\lambda \in T$ ).

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra,  
és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  ( $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $\lambda \in T$ ).

Az egységelem az identikus transzformáció.

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  ( $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $\lambda \in T$ ).

Az egységelem az identikus transzformáció.

**FONTOS házi feladat** önállóan kidolgozni a bizonyítást!

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  ( $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $\lambda \in T$ ).

Az egységelem az identikus transzformáció.

**FONTOS házi feladat** önállóan kidolgozni a bizonyítást!

Különösen ajánlom a két disztributív azonosság levezetését:

# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  ( $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $\lambda \in T$ ).

Az egységelem az identikus transzformáció.

**FONTOS házi feladat** önállóan kidolgozni a bizonyítást!

Különösen ajánlom a két disztributív azonosság levezetését:

$$A(B + C) = AB + AC$$



# A műveletek tulajdonságai

## Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$  rövidítve  $\text{Hom}(V)$ , elemei lineáris **transzformációk**.

## Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek ugyanazon  $T$  test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra  $\text{Hom}(V, W)$  **vektortér**.

Nullelem: a nulla leképezés. Az  $A$  ellentettje:  $(-A)(v) = -A(v)$ .

$\text{Hom}(V)$  egységelemes **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  ( $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $\lambda \in T$ ).

Az egységelem az identikus transzformáció.

**FONTOS házi feladat** önállóan kidolgozni a bizonyítást!

Különösen ajánlom a két disztributív azonosság levezetését:

$A(B + C) = AB + AC$  és  $(B + C)A = BA + CA$ .

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**,

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.  
A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek,

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.  
A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $b$  bázis  $V$ -ben,

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

akkor  $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $V$  és  $T^n$  között.



# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

akkor  $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $V$  és  $T^n$  között.

Ezért **minden**  $V$  vektortér **izomorf**  $T^{\dim(V)}$ -vel.

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

akkor  $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $V$  és  $T^n$  között.

Ezért **minden**  $V$  vektortér **izomorf**  $T^{\dim(V)}$ -vel.

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben.

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

akkor  $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $V$  és  $T^n$  között.

Ezért **minden**  $V$  vektortér **izomorf**  $T^{\dim(V)}$ -vel.

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben.

Ekkor  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

akkor  $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $V$  és  $T^n$  között.

Ezért **minden  $V$  vektortér izomorf  $T^{\dim(V)}$ -vel.**

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben.

Ekkor  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Vagyis  **$\text{Hom}(V, W) \cong T^{\dim(W) \times \dim(V)}$ .**

# Példák izomorfizmusra

## Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az  $A \in \text{Hom}(V, W)$  **izomorfizmus**, ha kölcsönösen egyértelmű.

A  $V$  és  $W$  **izomorf** vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Jele:  $V \cong W$ .

## Két fontos példa

Ha  $V$  vektortér a  $T$  test fölött, és  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,

akkor  $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $V$  és  $T^n$  között.

Ezért **minden**  $V$  vektortér **izomorf**  $T^{\dim(V)}$ -vel.

Legyen  $\mathbf{b}$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{d}$  bázis  $W$ -ben.

Ekkor  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  izomorfizmus  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

Vagyis  $\text{Hom}(V, W) \cong T^{\dim(W) \times \dim(V)}$ .

A művelettartást láttuk, az egyértelműséget most bebizonyítjuk.

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben,

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.



# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A: V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A: V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor  
 $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)$

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó,

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó, és ez

$$\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) =$$

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó, és ez

$$\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) =$$

mert  $A$  skalárszorostartó.

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó, és ez

$$\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n,$$

mert  $A$  skalárszorostartó.

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A: V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó, és ez

$$\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n,$$

mert  $A$  skalárszorostartó. Azaz  $A$  értékét  $V$  minden elemén ki tudjuk számítani,



# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó, és ez

$$\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n,$$

mert  $A$  skalárszorostartó. Azaz  $A$  értékét  $V$  minden elemén ki tudjuk számítani, és így **csak egy** megfelelő  $A$  leképezés létezik.

# Az előírhatósági tétel

## Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek  $V$  és  $W$  vektorterek a  $T$  test fölött,  
 $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, és  $c_1, \dots, c_n \in W$  tetszőleges vektorok.  
Ekkor pontosan egy olyan  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés van,  
melyre  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.

## Bizonyítás: egyértelműség

Ha  $A$  megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert  $A$  összegtartó, és ez

$$\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n,$$

mert  $A$  skalárszorostartó. Azaz  $A$  értékét  $V$  minden elemén ki tudjuk számítani, és így **csak egy** megfelelő  $A$  leképezés létezik. Az egyértelműséget tehát beláttuk.

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó,

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ ,

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor  
 $v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ ,



# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n)$ ,

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n)$ ,

azaz tényleg  $A(v + w) = A(v) + A(w)$ .

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n)$ ,

azaz tényleg  $A(v + w) = A(v) + A(w)$ .

A skalárszorostartás bizonyítása hasonló: HF.

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez jóldefiniált, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  összegtartó, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n)$ ,

azaz tényleg  $A(v + w) = A(v) + A(w)$ .

A skalárszorostartás bizonyítása hasonló: HF.

Mivel  $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$ ,

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez **jóldefiniált**, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  **összegtartó**, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n)$ ,

azaz tényleg  $A(v + w) = A(v) + A(w)$ .

A **skalárszorostartás** bizonyítása hasonló: HF.

Mivel  $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$ ,

ezért  $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \dots + 0 \cdot c_n = c_1$ .

# Az előírhatósági tétel: létezés

## Bizonyítás: létezés

Legyen  $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$ .

Ez **jóldefiniált**, mert  $V$  minden eleme egyértelműen írható fel  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  alakban.

Az  $A$  **összegtartó**, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  és  $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor

$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$ , és így

$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$ .

$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n)$ ,

azaz tényleg  $A(v + w) = A(v) + A(w)$ .

A **skalárszorostartás** bizonyítása hasonló: HF.

Mivel  $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$ ,

ezért  $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \dots + 0 \cdot c_n = c_1$ .

Hasonlóan  $A(b_j) = c_j$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.



# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés



# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés izomorfizmus  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés izomorfizmus  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között,

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban.

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban. Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban.

Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor

$$A(b_1), \dots, A(b_n) \text{ és}$$

$B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér.

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban. Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  és  $B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér.

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m d_m$  alakban. Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  és  $B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek,

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban. Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  és  $B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz  $A$  és  $B$  mátrixa különböző.



# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban.

Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  és  $B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz  $A$  és  $B$  mátrixa különböző.

Ha adott egy  $M \in T^{m \times n}$  mátrix,

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban.

Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  és

$B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz  $A$  és  $B$  mátrixa különböző.

Ha adott egy  $M \in T^{m \times n}$  mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy  $c_1, \dots, c_m$  vektorrendszert adnak  $W$ -ben,

# Mátrixok és leképezések: egyértelműség

## Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{d}$  bázisok esetén az  $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$  leképezés **izomorfizmus**  $\text{Hom}(V, W)$  és  $T^{m \times n}$  között.

## Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$  kölcsönösen egyértelmű  $W$  és  $T^m$  között, hiszen  $W$  minden eleme **egyértelműen** írható  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m c_m$  alakban.

Ha  $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$ , akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  és

$B(b_1), \dots, B(b_n)$  valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz  $A$  és  $B$  mátrixa különböző.

Ha adott egy  $M \in T^{m \times n}$  mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy  $c_1, \dots, c_m$  vektorrendszernek adnak  $W$ -ben, és az előírhatósági tételből kapott  $A$  leképezésnek  $M$  lesz a mátrixa.  $\square$

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf,

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben



# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések,

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény:  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

**Következmény:**  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

**HF:** ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

**Következmény:**  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

**HF:** ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

**Megfordítva:** ha  $A: V \rightarrow W$  izomorfizmus

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

**Következmény:**  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

**HF:** ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

**Megfordítva:** ha  $A: V \rightarrow W$  izomorfizmus és  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben,

# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

**Következmény:**  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

**HF:** ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

**Megfordítva:** ha  $A: V \rightarrow W$  izomorfizmus és  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, akkor **HF:**  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  bázis  $W$ -ben.



# Az izomorfizmus jellemzése

## Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

**Következmény:**  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$ .

## Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy  $V$  és  $W$  dimenziója egyenlő.

Legyen  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben és  $d_1, \dots, d_n$  bázis  $W$ -ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan  $B$  és  $C$  lineáris leképezések, melyekre  $B(b_j) = d_j$  és  $C(d_j) = b_j$  minden  $j$ -re.

**HF:** ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

**Megfordítva:** ha  $A: V \rightarrow W$  izomorfizmus és  $b_1, \dots, b_n$  bázis  $V$ -ben, akkor **HF:**  $A(b_1), \dots, A(b_n)$  bázis  $W$ -ben.

Ezért a két dimenzió megegyezik. □

# A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Összegezés,

## A 3. előadáshoz tartozó vizsganyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás,

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa,

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa,

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.



## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris;

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegezés, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegezés, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szorosa, szorzata is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér és izomorf  $T^{n \times k}$ -val.



## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér és izomorf  $T^{n \times k}$ -val.

$\text{Hom}(V)$  gyűrű,

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegeztetés, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szorosa, szorzata is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér és izomorf  $T^{n \times k}$ -vel.

$\text{Hom}(V)$  gyűrű, és a megfeleltetés  $T^{n \times n}$ -nel szorzattartó.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegeztetés, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér és izomorf  $T^{n \times k}$ -val.

$\text{Hom}(V)$  gyűrű, és a megfeleltetés  $T^{n \times n}$ -nel szorzattartó.

Vektortér-izomorfia jellemzése a dimenzióval.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegeztetés, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér és izomorf  $\mathcal{T}^{n \times k}$ -val.

$\text{Hom}(V)$  gyűrű, és a megfeleltetés  $\mathcal{T}^{n \times n}$ -nel szorzattartó.

Vektortér-izomorfia jellemzése a dimenzióval.

$\text{Hom}(V, W)$  dimenziója.

## A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Összegezés, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege,  $\lambda$ -szorosa, szorzata.

Izomorfizmus.

### Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél.

Az  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában.

Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével.

Az összeg,  $\lambda$ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa.

$\text{Hom}(V, W)$  vektortér és izomorf  $\mathcal{T}^{n \times k}$ -val.

$\text{Hom}(V)$  gyűrű, és a megfeleltetés  $\mathcal{T}^{n \times n}$ -nel szorzattartó.

Vektortér-izomorfia jellemzése a dimenzióval.

$\text{Hom}(V, W)$  dimenziója. Az előírhatósági tétel.