Algebra2, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewwkiss@gmail.com

1. előadás

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

Tankönyv: Freud Róbert: Lineáris algebra.

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

Tankönyv: Freud Róbert: Lineáris algebra.

Konzultáció: `ewwkiss@gmail.com`

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
    - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:

A gyakorlati jegy

`www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html`

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html`

A gyakorlati jegy

`www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html`

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html`
  - A begyakorlás otthonra való:

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
    - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
    - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
    - A begyakorlás otthonra való:
    - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból

A gyakorlati jegy

`www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html`

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html`
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
  - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
  - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
  - 7 pontot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen;

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
  - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
  - 7 pontot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen;
  - az első héten és a ZH-k hetében nincs röpdolgozat.

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
    - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
    - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
    - A begyakorlás otthonra való:
    - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 7 pontot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen;
    - az első héten és a ZH-k hetében nincs röpdolgozat.
- Két évfolyamzárthelyi:

A gyakorlati jegy

`www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html`

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html`
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
  - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
  - 7 pontot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen;
  - az első héten és a ZH-k hetében nincs röpdolgozat.
- Két évfolyamzárthelyi:
  - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
  - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
  - 7 pontot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen;
  - az első héten és a ZH-k hetében nincs röpdolgozat.
- Két évfolyamzárthelyi:
  - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
  - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.

A gyakorlati jegy

www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/bev_bsc_2012I.html

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok:
  - www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/gyak.html
  - A begyakorlás otthonra való:
  - gyakorló feladatok Freud Róbert könyvében.
- Csak három hiányzás megengedett.
- Minden gyakorlaton röpdolgozat:
  - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
  - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
  - 7 pontot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen;
  - az első héten és a ZH-k hetében nincs röpdolgozat.
- Két évfolyamzárthelyi:
  - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
  - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
  - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
    - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
    - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
    - A letöltés helye:
      `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
    - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri. Három részből áll:

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri. Három részből áll:
    - beugró a röpzéhák anyagából;

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri. Három részből áll:
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri. Három részből áll:
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;
    - bizonyítás (a tételek listája az utolsó prezentáció végén).

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri. Három részből áll:
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;
    - bizonyítás (a tételek listája az utolsó prezentáció végén).
  - Összesen három alkalom és egy UV.

A vizsga

- Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető. Ezért
  - az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - A letöltés helye:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/tem.html`
  - Ez a weblap egyben a vizsgatematika is.
  - Minden prezentáció végén összefoglaló a röpzéhákhoz.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri. Három részből áll:
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;
    - bizonyítás (a tételek listája az utolsó prezentáció végén).
  - Összesen három alkalom és egy UV.
  - A forma, pontozás ugyanaz, mint az előző félévben. Minták:
    `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/11o.n/tem.html`

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test.

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok,

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$.

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \ldots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

összeadást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

összeadást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

összeadást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

összeadást és a λ skalárral szorzást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$$

összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A nullvektor

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett:

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai:

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0 x + \ldots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0 x + \ldots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a pontonkénti műveletekre):

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n \times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0 x + \ldots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a pontonkénti műveletekre):
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0 x + \ldots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a pontonkénti műveletekre):
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok),

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás,

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor)

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak,

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak. Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható. Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés
kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak. Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható. Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora. Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c). Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés
kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály)
és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).
A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti
műveleteknek felelnek meg.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).
A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg. Ezért a térvektorok vektortere „ugyanolyan”, mint az oszlopvektorok $\mathbb{R}^3$ vektortere.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 =$

A fenti (4) miatt.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v =$

A (7) vektortéraxióma miatt.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$

A (8) vektortéraxióma miatt.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$. $\square$

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér,

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.
W a folytonos függvények.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.
W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok $\mathbb{C}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.
W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok $\mathbb{C}$ fölött.
W a felső háromszögmátrixok.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$,

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Alterek metszete is altér.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Alterek metszete is altér.

(3) Két altér uniója csak akkor altér, ha valamelyikük tartalmazza a másikat.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Az $ax + bx^2$ alakú polinomok már alteret alkotnak ($a, b \in \mathbb{R}$).

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.
Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \dots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \dots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert
$\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \dots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert
$\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$,
mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt az összeadásra.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \dots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt az összeadásra.
Így $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ minden eleme W-ben van. $\square$

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom),

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben,

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme **egyértelműen felírható** a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor,

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$, azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben.

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x, \;\; 1 + x^2, \;\; x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $c = \beta + \gamma$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $c = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $c = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$, $\beta = a - b$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $c = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$, $\beta = a - b$ és $\gamma = c - a + b$.

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $c = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$, $\beta = a - b$ és $\gamma = c - a + b$.
Lineáris egyenletrendszer az α, β, γ ismeretlenekre.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük. A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük. A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla. Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m \times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla
(ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ bázis.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér $n+1$-dimenziós T fölött.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal,

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak,

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.
Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.
Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével.
Bármely két bázis elemszáma ugyanaz.