Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2012. május 17.) — eredmények és pontozás

1. $\langle(1,1,1),(x,1,-1)\rangle = x$ (1 pont), $\|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$ (1 pont) és $\|(x,1,-1)\| = \sqrt{x^2+2}$ (1 pont). Mivel $\cos 60^\circ = 1/2$, ezért $x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+2}/2$ (1 pont). Négyzetre emelve $x^2 = 6$ adódik (1 pont). Tehát $x = \pm\sqrt{6}$, de az eredeti egyenletből látjuk, hogy $x \geq 0$, ezért csak a $\sqrt{6}$ megfelelő (1 pont).

2. Legyen $b_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ (1 pont). Ha $v = (0,1,2) \in W$, akkor a Gram–Schmidt-módszer képletéből $w = (0,1,2) - \sqrt{2}(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (-1,1,1)$ (2 pont). Ennek normája $\sqrt{3}$, ezért $b_2 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ (1 pont). A következő lépésben $v = (2,1,3)$, ekkor $w = (1/6, 2/6, -1/6)$ (1 pont), a keresett távolság ennek a normája, azaz $1/\sqrt{6}$ (1 pont). *Második megoldás a végére:* a keresett távolságot úgy is megkaphatjuk, hogy e sík normálvektorát, ami $(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ skalárisan szorozzuk $(2,1,3)$-mal, majd abszolút értéket veszünk (2 pont).

3. A kvadratikus alak mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(1 pont).}$$

A sajátértékek $1, -1, 2$ (1 pont), ezért az alak indefinit (1 pont). A három normált sajátvektort kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$2xy + 2z^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2z^2 \quad \text{(3 pont).}$$

4. A transzformáció mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(1 pont).}$$

Ez unitér (1 pont), önadjungált (1 pont) és ezért normális, azaz ONB-ban diagonalizálható (1 pont). Mivel $A(v) = (1, -3i, 1, -2i)^T$ (1 pont), ezért $\langle A(v), v\rangle = \overline{1}\cdot 3 + \overline{(-3i)}\cdot(-i) + \overline{1}\cdot 1 + \overline{(-2i)}\cdot 2i = 3$ (1 pont).

5. A karakterisztikus polinom $(1-x)^3$ és így az 1 az egyetlen sajátérték (2 pont). Mivel a mátrix gyöke $(x-1)^2$-nek, de $(x-1)$-nek nem, ezért a minimálpolinom $(x-1)^2$ (2 pont). Ezért a legnagyobb Jordan-blokk 2×2-es és így a Jordan-alak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(2 pont), megfelel} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{is.}$$

6. $M^2 = M^* \implies \langle M^4v, w\rangle = \langle (M^*)^2 v, w\rangle = \langle M^*v, Mw\rangle = \langle v, M^2 w\rangle = \langle v, M^*w\rangle = \langle Mv, w\rangle$, ezért $\langle M^4v - Mv, w\rangle = 0$. Speciálisan $w = M^4v - Mv$ esetén $\|M^4v - Mv\| = 0$, azaz $(M^4 - M)v = 0$ minden v-re és így $M^4 - M = 0$. *Második megoldás:* Mivel $M^* = M^2$ felcserélhető M-mel, ezért M ONB-ban diagonalizálható. Legyen A az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa az egyik ONB-ban M, egy másikban pedig a D diagonális mátrix. Ekkor $A^2 = A^*$ és így $D^2 = D^*$ is teljesül. A D főátlójában lévő tetszőleges λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^2$. Mindkét oldal abszolút értékét véve kapjuk, hogy $|\lambda| = 1$ vagy 0. Utóbbi esetben $\lambda = 0$, az előbbibben a $\overline{\lambda} = \lambda^2$ egyenletet λ-val szorozva $1 = |\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda} = \lambda^3$ adódik. Azaz a D diagonális mátrix főátlójának minden elemére $\lambda^4 = \lambda$, és így $D^4 = D$. Innen $A^4 = A$, és ezért $M^4 = M$.