Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2012. március 29.) — eredmények és pontozás

1. W_2 nem altér, mert $x-1$ és $x-2$ is eleme, de az összegük nem (2 pont). A W_1 elemei azok a polinomok, amelyeknek az 1 és 2 is gyöke (1 pont). Ezek alteret alkotnak (0 pont), melyben $(x-1)(x-2)$ és $(x-1)(x-2)x$ bázis (indoklás nélkül 1 pont), és így dimenziója 2 (1 pont). E polinomok függetlenek, mert nem egymás konstansszorosai (0 pont). Generátorrendszert alkotnak (bármilyen jó indoklás 1 pont), mert W_1 elemei $(x-1)(x-2)(ax+b)$, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$.

2. B nem lineáris, mert ha E az egységmátrix, akkor $B(2E) = 4E$ nem egyenlő $2B(E) = 2E$-vel (2 pont). Az A lineáris (0 pont). Vegyük a szokásos bázist $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben, ebben A mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ (4 pont). A szokásos bázis vektorai $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 3x^2 - 2x$ (1 pont), a sajátértékek 2, 1, 0 (1 pont), ez három különböző sajátérték, és a mátrix 3×3-as, tehát diagonalizálható (1 pont). A megfelelő sajátvektorok $[1,0,0]^T$, $[-4,1,2]^T$, $[-1,0,1]^T$ skalárszorosai (mindegyik 1 pont).

4. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pont), $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), a végeredmény $S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3 pont). A bázistranszformáció képletét alkalmaztuk, S az áttérés mátrixa. *Második megoldás:* $A\big((1,1)\big) = (1,2)$ és $A\big((0,1)\big) = (1,0)$ (1+1 pont). A megfelelő két lineáris egyenletrendszert megoldva a fenti mátrixot kapjuk (2+2 pont).

5. A szokásos bázisban $[Y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont) és $[F] = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (2 pont), így $[FY] = [F][Y] = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (1 pont) és $(1,2)$ képe $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (1 pont). A magtér az x-tengely, hiszen $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\sqrt{3}/2 \\ y/2 \end{pmatrix}$ akkor és csak akkor a nullvektor, ha $y = 0$ (1 pont).

6. A lehetséges értékek 0, 1 és 2 (1 pont). Ennél több nem lehet a dimenzió, mert (bármelyik) két megadott vektor generálja a négy vektor által generált alteret (2 pont). A példák: ha mindegyik a nullvektor, akkor a dimenzió 0; ha mindegyik ugyanaz a nem nulla vektor, akkor a dimenzió 1; ha a síkon veszünk négy páronként nem párhuzamos vektort, akkor a dimenzió 2 (1+1+1 pont).