Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2012. március 29.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont, 90 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név, az EHA-kód és a gyakorlatvezető neve (FP vagy KE).

1. Legyen V a $\mathbb{Q}[x]$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér azon altere, amely a legfeljebb harmadfokú polinomokból és a nullapolinomból áll, továbbá

a) $W_1 = \{f \in V \,:\, f(1)^2 + f(2)^2 = 0\}$ és

b) $W_2 = \{f \in V \,:\, f(1)f(2) = 0\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig altér, annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát. A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

2. Legyen V a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{C}$ fölötti vektortér, továbbá

a) $A(M) = M + M^T$ és

b) $B(M) = MM^T$.

Amelyik nem lineáris transzformáció A és B közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát (a bázis tetszőlegesen választható, de fel kell sorolni a vektorait).

3. Adjuk meg az

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, és döntsük el, hogy diagonalizálható-e.

4. Legyen C az a lineáris transzformáció a síkon, melynek mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Mi lesz C mátrixa az $(1,1)$, $(0,1)$ bázisban?

5. Legyen Y a síkon a merőleges vetítés az y-tengelyre, F pedig forgatás az origó körül $+60$ fokkal. Mi az FY transzformáció mátrixa (a szokásos bázisban), és mi a magtere? Hová viszi FY az $(1,2)$ pontot?

6. Egy vektortér négy vektora közül bármely kettő benne van a másik kettő által generált altérben. Mennyi lehet az általuk generált altér dimenziója? Minden lehetséges értékre adjunk is példát.