Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 4. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2012. júl. 6.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért* 1 *pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. Figyeljünk a megfogalmazásban **a kvantorok helyes használatára.**

Minden $v \in V$-hez **létezik** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

2. Definiáljuk a V vektortér U és W altereinek összegét **a halmazos jelöléssel.**

$U + W = \{u + w \,:\, u \in U \text{ és } w \in W\}$.

3. Mondjuk ki az altér dimenziójáról szóló tételt véges dimenziós V vektortérre, figyelve arra is, hogy mikor állhat egyenlőség.

Ha W altere V-nek, akkor $\dim W \le \dim V$, és egyenlőség csak $V = W$ esetén lehetséges.
Vagy: Ha W valódi altér V-ben, akkor $\dim W < \dim V$.

4. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \le i \le n$ esetén.

5. Mondjuk ki a lineáris leképezésekre vonatkozó dimenziótételt (felírva azt is, hogy a leképezés honnan hová képez, és az ezen vektorterekre vonatkozó feltételeket).

Ha V véges dimenziós és $A \in \operatorname{Hom}(V, W)$, akkor $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim V$.

6. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ és $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ két bázis V-ben, és $S = ((s_{ij}))$ a bázistranszformáció $[A]_{\mathbf{c}/\mathbf{c}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$ képletében szereplő mátrix. Írjuk föl az S elemeit megadó összefüggést.

Az S mátrix j-edik oszlopa $[c_j]_{\mathbf{b}}$, azaz $c_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}b_i$.

7. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \Longleftrightarrow m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

8. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

Az A és B pontosan akkor adjungáltak, ha minden v, w vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.

9. Definiáljuk a normális transzformáció fogalmát. Milyen test fölött beszélünk erről?

$\mathbb{C}$ fölött A normális, ha $AA^* = A^*A$.

10. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformációnak invariáns altere.

Minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.