Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 4. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2012. júl. 6.*

NÉV: __________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben az **alaptestbeli** összeadás művelete is szerepel?

$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy az önadjungált mátrixok nem alkotnak alteret az összes $n \times n$-es mátrixok között $\mathbb{C}$ fölött.

Pl. az egységmátrix önadjungált, de az i-szerese nem.

13. Legyen $0 \neq v \in V = \mathbb{R}^7$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Mennyi $\dim W$?

1

14. Ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben bármely $v_1, \ldots, v_5$ generátorrendszerből ki lehet választani négy független vektort, akkor mennyi lehet a dimenzió?

4 vagy legalább 6.

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(AB) = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a P, A, B, Z, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(Z) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(AB)\big)(v) = \quad \boxed{\text{Z}}$$
$$\lambda\big((AB)(v)\big) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$\lambda\big(A(B(v))\big) = \quad \boxed{\text{A}}$$
$$A\big(\lambda(B(v))\big) = \quad \boxed{\text{Z}}$$
$$A\big((\lambda B)(v)\big) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$\big(A(\lambda B)\big)(v)$$

17. Legyen V a sík $\mathbb{R}$ fölött. Az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy minden $0 \neq v \in V$-hez létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $A(\lambda v) \neq 0$. Mik $\dim \mathrm{Ker}\, A$ lehetséges értékei?

0

18. Legyenek A és B lineáris transzformációk. Tudjuk, hogy v sajátvektora A-nak, és a hozzá tartozó sajátérték 3. Számítsuk ki $3\big(B(v)\big) - B\big(A(v)\big) + A(2v)$ értékét.

   $6v$

19. Legyen $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$ az a lineáris transzformáció, melyre $A(M) = M + M^T$ minden $M \in V$-re. Mennyi A rangja?

   $r(A) = 3$

20. Legyen V a 3×3-as felső háromszögmátrixok vektortere és A rendelje ezekhez a főátlóbeli elemeik összegét. Mennyi $\dim \mathrm{Ker}(A)$?

   5

21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{3\times 3}$-beli Jordan-alakú mátrixot, amelynek két komplex sajátértéke van.

   Pl. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

22. Egy diagonalizálható $\mathbb{C}^{4\times 4}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^3-1)(x-1)$. Mi lehet a minimálpolinomja?

   $x^3 - 1$

23. Az $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mátrixra $M^2 = 6M - 9E$. Mik a sajátértékei?

   3

24. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?

   $c = 0$

25. Az $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 3 \end{pmatrix}$ milyen komplex z értékekre lesz **ONB-ben** diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?

   z valós

26. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, u - 2iv \rangle$?

   -1

27. $\sqrt{9 + (2+b)^2 + (2+c)^2} = 3 + \sqrt{4 + b^2 + c^2}$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

   $b = 4$ és $c = 4$.

28. Egy valós mátrix egyszerre szimmetrikus és ortogonális. Mik lehetnek a komplex sajátértékei?

   1 és -1.

29. A egybevágósági transzformáció $\mathbb{R}^2$-en, melynek i sajátértéke. Mi ez a transzformáció?

   Forgatás ± 90 fokkal.

30. Egy $Q \neq 0$ valós kvadratikus alak az $(1,0)^T$ és a $(0,1)^T$ vektoron is a 0 értéket veszi fel. Mi a karaktere?

   Indefinit.