

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben az **alaptestbeli** összeadás művelete is szerepel?

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy az önadjungált mátrixok nem alkotnak alteret az összes $n \times n$ -es mátrixok között \mathbb{C} fölött.

13. Legyen $0 \neq v \in V = \mathbb{R}^7$ az \mathbb{R} fölött és $W = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Mennyi $\dim W$?

14. Ha egy \mathbb{R} feletti vektortérben bármely v_1, \dots, v_5 generátorrendszerből ki lehet választani négy független vektort, akkor mennyi lehet a dimenzió?

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(AB) = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a P, A, B, Z, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(A) A skalárszoros-tartó.

(B) B skalárszoros-tartó.

(Z) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(AB))(v) = \square$$

$$\lambda((AB)(v)) = \square$$

$$\lambda(A(B(v))) = \square$$

$$A(\lambda(B(v))) = \square$$

$$A((\lambda B)(v)) = \square$$

$$(A(\lambda B))(v)$$

17. Legyen V a sík \mathbb{R} fölött. Az $A \in \text{Hom}(V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy minden $0 \neq v \in V$ -hez létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $A(\lambda v) \neq 0$. Mik $\dim \text{Ker } A$ lehetséges értékei?

18. Legyenek A és B lineáris transzformációk. Tudjuk, hogy v sajátvektora A -nak, és a hozzá tartozó sajátérték 3. Számítsuk ki $3(B(v)) - B(A(v)) + A(2v)$ értékét.
19. Legyen $V = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ és $A \in \text{Hom}(V)$ az a lineáris transzformáció, melyre $A(M) = M + M^T$ minden $M \in V$ -re. Mennyi A rangja?
20. Legyen V a 3×3 -as felső háromszögmátrixok vektortere és A rendelje ezekhez a főátlóbeli elemeik összegét. Mennyi $\dim \text{Ker}(A)$?
21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -beli Jordan-alakú mátrixot, amelynek két komplex sajátértéke van.
22. Egy diagonalizálható $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^3 - 1)(x - 1)$. Mi lehet a minimálpolinomja?
23. Az $M \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ mátrixra $M^2 = 6M - 9E$. Mik a sajátértékei?
24. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható \mathbb{C} fölött?
25. Az $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 3 \end{pmatrix}$ milyen komplex z értékekre lesz **ONB-ben** diagonalizálható \mathbb{C} fölött?
26. Legyenek u és v merőleges egységvektorok \mathbb{C} fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, u - 2iv \rangle$?
27. $\sqrt{9 + (2 + b)^2 + (2 + c)^2} = 3 + \sqrt{4 + b^2 + c^2}$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?
28. Egy valós mátrix egyszerre szimmetrikus és ortogonális. Mik lehetnek a komplex sajátértékei?
29. A egybevágósági transzformáció \mathbb{R}^2 -en, melynek i sajátértéke. Mi ez a transzformáció?
30. Egy $Q \neq 0$ valós kvadratikusan alak az $(1, 0)^T$ és a $(0, 1)^T$ vektoron is a 0 értéket veszi fel. Mi a karaktere?