NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek a T test fölött. Figyeljünk a logikailag helyes megfogalmazásra.

Minden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ esetén, **ha** $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, **akkor** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i-edik koordinátáját a $b_1, \ldots, b_n$ **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ **fölött** ki lehet számítani.

$\langle b_i, v \rangle$

3. Mondjuk ki az altér dimenziójáról szóló tételt véges dimenziós V vektortérre, figyelve arra is, hogy mikor állhat egyenlőség.

Ha W altere V-nek, akkor $\dim W \leq \dim V$, és egyenlőség csak $V = W$ esetén lehetséges.
Vagy: Ha W valódi altér V-ben, akkor $\dim W < \dim V$.

4. Legyen $\dim V = n$ és $\dim W = m$. Mennyi lesz $\dim \operatorname{Hom}(V, W)$?

$\dim \operatorname{Hom}(V, W) = n \cdot m$.

5. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \operatorname{Hom}(V, W)$ és $B \in \operatorname{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha **a**, **b**, **c** bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

6. Definiáljuk az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés $r(A)$ rangját.

$r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

7. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk.

Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

8. Mondjuk ki az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix $\mathbb{C}$ fölötti diagonalizálhatóságát a $\mathbb{C}$ fölötti m_M minimálpolinomjának segítségével jellemző tételt.

M pontosan akkor diagonalizálható, ha m_M minden komplex gyöke egyszeres.

9. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a skaláris szorzatot.

$\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ minden v és w vektorra.

10. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformációnak invariáns altere.

Minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.