Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2012. jún. 27.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben három vektor szerepel?

$(u+v)+w = u+(v+w)$

12. Adjunk meg egy háromdimenziós alteret a $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}^{3\times 3}$ vektortérben.

Pl. a diagonális mátrixokból álló altér.

13. Legyen $V = \mathbb{R}^7$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \{\lambda v \,:\, \lambda \in \mathbb{R},\, v \in V\}$. Mennyi $\dim W$?

7

14. Adjunk meg három bázist a síkon $\mathbb{R}$ fölött.

Pl. $\mathbf{b} = \big((0,1),(1,0)\big)$
$\mathbf{c} = \big((1,1),(1,0)\big)$
$\mathbf{d} = \big((0,1),(1,2)\big)$

15. Ha egy vektortérben bármely négyelemű vektorhalmaz lineárisan összefügg, és van négyelemű generátorrendszer, akkor mennyi lehet a dimenzió?

legfeljebb 3

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, T, L, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A, B összegtartó.
(T) A, B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(S) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(A+B)\big)(v) = \quad \boxed{\text{L}}$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$\lambda\big(A(v)+B(v)\big) = \quad \boxed{\text{N}}$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \boxed{\text{L}}$$
$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. Legyenek A és B lineáris transzformációk. Tudjuk, hogy $A(c) = c + d$ és $B(c) = c - 2d$. Mennyi $(2A + B)(3c)$?

    $9c$

19. Legyen $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$ az a lineáris transzformáció, melyre $A(M) = M - M^T$ minden $M \in V$-re. Mennyi A rangja?

    $r(A) = 1$

20. Ha $A : \mathbb{C}^{3\times 3} \to \mathbb{C}^3$ nem szürjektív lineáris leképezés, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A)$ lehetséges értékei?

    7, 8, vagy 9.

21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ felső háromszögmátrixot, amelynek pontosan egy komplex sajátértéke van.

    Pl. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

22. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{4\times 4}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^3 - 1)(x - 1)$. Mi lehet a minimálpolinomja?

    $(x^3 - 1)(x - 1)$

23. Az $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mátrix sajátértékei 2 és -2. Melyik mátrix lesz M^2?

    $M^2 = 4E = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

24. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?

    Minden c-re.

25. Az $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ milyen valós d értékekre lesz **ONB-ben** diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?

    $d = 0$

26. Adjunk meg egy $(2i, i)$-re merőleges egységvektort.

    $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$

27. $(1 + 2b + 3c)^2 = 14(1 + b^2 + c^2)$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

    $b = 2$ és $c = 3$

28. Mely z komplex számokra lesz $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & iz \end{pmatrix}$ önadjungált?

    $z = 0$

29. Egy unitér M mátrix determinánsa $r + (i/2)$. Mik a valós r szám lehetséges értékei?

    $\pm\sqrt{3}/2$

30. Egy Q valós kvadratikus alak az $(1, 2)^T$ vektoron a 4 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az $(5, 10)^T$ vektoron?

    100