

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben három vektor szerepel?

12. Adjunk meg egy háromdimenziós alteret a \mathbb{C} fölötti $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ vektortérben.

13. Legyen $V = \mathbb{R}^7$ az \mathbb{R} fölött és $W = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}, v \in V\}$. Mennyi $\dim W$?

14. Adjunk meg három bázist a síkon \mathbb{R} fölött.

15. Ha egy vektortérben bármely négyelemű vektorhalmaz lineárisan összefügg, és van négyelemű generátorrendszer, akkor mennyi lehet a dimenzió?

- 16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, T, L, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A, B összegtartó.

(T) A, B skalárszoros-tartó.

(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(S) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(A + B))(v) = \quad \square$$

$$\lambda((A + B)(v)) = \quad \square$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \quad \square$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \quad \square$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \square$$

$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. Legyenek A és B lineáris transzformációk. Tudjuk, hogy $A(c) = c + d$ és $B(c) = c - 2d$. Mennyi $(2A + B)(3c)$?

19. Legyen $V = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ és $A \in \text{Hom}(V)$ az a lineáris transzformáció, melyre $A(M) = M - M^T$ minden $M \in V$ -re. Mennyi A rangja?

20. Ha $A : \mathbb{C}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{C}^3$ nem szürjektív lineáris leképezés, akkor mik $\dim \text{Ker}(A)$ lehetséges értékei?

21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ felső háromszögmátrixot, amelynek pontosan egy komplex sajátértéke van.

22. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^3 - 1)(x - 1)$. Mi lehet a minimálpolinomja?

23. Az $M \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ mátrix sajátértékei 2 és -2 . Melyik mátrix lesz M^2 ?

24. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható \mathbb{C} fölött?

25. Az $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ milyen valós d értékekre lesz **ONB-ben** diagonalizálható \mathbb{C} fölött?

26. Adjunk meg egy $(2i, i)$ -re merőleges egységvektort.

27. $(1 + 2b + 3c)^2 = 14(1 + b^2 + c^2)$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

28. Mely z komplex számokra lesz $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & iz \end{pmatrix}$ önadjungált?

29. Egy unitér M mátrix determinánusa $r + (i/2)$. Mik a valós r szám lehetséges értékei?

30. Egy Q valós kvadratikus alak az $(1, 2)^T$ vektoron a 4 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az $(5, 10)^T$ vektoron?