Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2012. jún. 15.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl a generált altér, azaz $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ definícióját **a halmazos jelöléssel.**

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$

2. Jellemezzük a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangját a független részhalmazok segítségével. (Nem a dimenzióval való definíciót kérdezzük.)

$r(v_1, \ldots, v_n) = r$, ha $\{v_1, \ldots, v_n\}$-nek van r elemű lineárisan független részhalmaza, de bármely $r+1$ elemű részhalmaz lineárisan összefüggő.

3. Mondjuk ki az $U + W$ altér dimenzióját megadó képletet.

$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

4. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

5. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha **a**, **b**, **c** bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$

6. Definiáljuk az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ leképezés λ-hoz tartozó sajátaltérét **a halmazos jelöléssel.**

$\{v \in V \ : \ A(v) = \lambda v\}$

7. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \Longleftrightarrow m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

8. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

Az A és B pontosan akkor adjungáltak, ha minden v, w vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.

9. Definiáljuk az unitér transzformáció fogalmát.

$A^* = A^{-1}$ ($\mathbb{C}$ fölött).

10. Mi a **definíciója** annak, hogy a Q kvadratikus alak indefinit? **Nem** a sajátértékekkel vagy az aldeterminánsokkal való jellemzést kérdezzük!

Van olyan v, melyre $Q(v) > 0$ **és** van olyan w, melyre $Q(w) < 0$.