

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**II. rész (60 perc).** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben egy vektor és egy skalár szerepel?

$1v = v$

12. Adjuk meg a sík egy részhalmazát, mely (valós) skalárral szorzásra zárt, de összeadásra nem.

Pl. az  $x$ -tengely és az  $y$ -tengely uniója.

13. Adjunk meg három olyan kétdimenziós alteret a  $2 \times 2$ -es felső háromszögmátrixok vektorterében, amely az egységmátrixot tartalmazza. Szabad generált altérként is megadni.

Pl.  $\left\langle E, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle E, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

14. Egy vektor koordinátavektora a  $(b_1, b_2)$  bázisban  $(1, 1)^T$ . Mi lesz a koordinátavektora a  $(2b_1, b_2)$  bázisban?

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. Ha egy vektortérben van négyelemű független generátorrendszer és kételemű független rendszer is, akkor hány elemű független rendszer lehet benne?

legfeljebb 4

- 16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az X, S, L, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(X) Vektortéraxióma.

(S)  $A$ , illetve  $B$  összegtartó.(L)  $A$ , illetve  $B$  skalárszoros-tartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás:	4 v. 3 helyes válasz:	2 pont;
	2 helyes válasz:	1 pont;
	egyébként:	0 pont.

$$(A + B)(\lambda v) = \boxed{\text{O}}$$

$$A(\lambda v) + B(\lambda v) = \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{\text{X}}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{\text{O}}$$

$$\lambda((A + B)(v))$$

18. Ha  $A : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$  szürjektív lineáris leképezés, akkor hánydimenziós lehet  $\text{Ker}(A)$ ?
19. Egy  $2 \times 2$ -es mátrix sajátértékei  $1 + i$  és  $1 - i$ . Mennyi a determinánsa?
20. Egy  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja  $x(x + i)$ . Mik a rangjának a lehetséges értékei?
21. Egy diagonalizálható  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja  $(x^2 - 1)^2$ . Mi lehet a minimálpolinomja?
22. Az  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrixra  $M^2 = M$ . Mekkora lehet a Jordan alakjában a legnagyobb blokk mérete?
23. Adjunk meg egy olyan kétszer kettes valós mátrixot, ami  $\mathbb{R}$  fölött diagonalizálható, de  $\mathbb{C}$  fölött ONB-ben nem diagonalizálható.
24.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix}$  két (különböző sajátértékhez tartozó) sajátvektorának mi a szöge?
25.  $B$  normális transzformáció, melyre  $B(v) = (2 - i)v$ . Mennyi lesz  $(B^*)^2(v)$ ?
26. Adjunk meg egy  $(1, i)$ -re merőleges egységvektort.
27. Ha  $a^2 + b^2 = 2$  és  $c^2 + d^2 = 3$ , akkor mi lesz  $(a + c)^2 + (b + d)^2$  maximális értéke? Itt  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .
28. Mely  $z$  komplex számokra lesz  $\begin{pmatrix} 1 & 3 - i \\ z & z \end{pmatrix}$  egy önadjungált transzformáció mátrixa  $\mathbb{C}$  fölött?
29. Egy  $M$  valós ortogonális mátrix diagonalizálható valós fölött. Mivel egyenlő  $M^2$ ?
30. Egy valós kvadratikus alak mátrixa  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ . Milyen értéket vesz fel az  $(1, 1)^T$  vektoron?