Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2012. jún. 15.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben egy vektor és egy skalár szerepel?

12. Adjuk meg a sík egy részhalmazát, mely (valós) skalárral szorzásra zárt, de összeadásra nem.

13. Adjunk meg három olyan kétdimenziós alteret a 2×2-es felső háromszögmátrixok vektorterében, amely az egységmátrixot tartalmazza. Szabad generált altérként is megadni.

14. Egy vektor koordinátavektora a (b_1, b_2) bázisban $(1,1)^T$. Mi lesz a koordinátavektora a $(2b_1, b_2)$ bázisban?

15. Ha egy vektortérben van négyelemű független generátorrendszer és kételemű független rendszer is, akkor hány elemű független rendszer lehet benne?

16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az X, S, L, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
(X) Vektortéraxióma.
(S) A, illetve B összegtartó.
(L) A, illetve B skalárszoros-tartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:}\quad \begin{array}{ll} \text{4 v. 3 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
(A+B)(\lambda v) &= \quad \square \\
A(\lambda v) + B(\lambda v) &= \quad \square \\
\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) &= \quad \square \\
\lambda\big(A(v) + B(v)\big) &= \quad \square \\
\lambda\big((A+B)(v)\big) &
\end{aligned}$$

18. Ha $A : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3$ szürjektív lineáris leképezés, akkor hány-dimenziós lehet $\mathrm{Ker}(A)$?

19. Egy 2×2-es mátrix sajátértékei $1 + i$ és $1 - i$. Mennyi a determinánsa?

20. Egy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $x(x + i)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

21. Egy diagonalizálható $\mathbb{C}^{4\times 4}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2 - 1)^2$. Mi lehet a minimálpolinomja?

22. Az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $M^2 = M$. Mekkora lehet a Jordan-alakjában a legnagyobb blokk mérete?

23. Adjunk meg egy olyan kétszer kettes valós mátrixot, ami $\mathbb{R}$ fölött diagonalizálható, de $\mathbb{C}$ fölött ONB-ben nem diagonalizálható.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ két (különböző sajátértékhez tartozó) sajátvektorának mi a szöge?

25. B normális transzformáció, melyre $B(v) = (2-i)v$. Mennyi lesz $(B^*)^2(v)$?

26. Adjunk meg egy $(1, i)$-re merőleges egységvektort.

27. Ha $a^2+b^2 = 2$ és $c^2+d^2 = 3$, akkor mi lesz $(a+c)^2+(b+d)^2$ maximális értéke? Itt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

28. Mely z komplex számokra lesz $\begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ z & z \end{pmatrix}$ egy önadjungált transzformáció mátrixa $\mathbb{C}$ fölött?

29. Egy M valós ortogonális mátrix diagonalizálható valós fölött. Mivel egyenlő M^2?

30. Egy valós kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$. Milyen értéket vesz fel az $(1, 1)^T$ vektoron?