Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 1. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2012. jún. 1.*

NÉV: ________________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ definícióját a halmazos jelöléssel.

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$$

2. Definiáljuk a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangját a dimenzió fogalma segítségével.

$r(v_1, \ldots, v_n) = \dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, azaz a $v_1, \ldots, v_n$ által generált altér dimenziója.

3. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i-edik koordinátáját a $b_1, \ldots, b_n$ **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ fölött ki lehet számítani.

$$\langle b_i, v \rangle$$

4. Fogalmazzuk meg képlettel mit jelent az, hogy az $A : V \to W$ leképezés összegtartó.

$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ minden $v_1, v_2 \in V$ esetén.

5. Definiáljuk a halmazos jelöléssel az $A : V \to W$ lineáris leképezés magterét.

$$\mathrm{Ker}(A) = \{v \in V \,:\, A(v) = 0\}$$

6. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

7. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk.

Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció távolságtartó.

$\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ minden v és w vektorra.

9. Mikor áll az u és w vektorokra felírt háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség? (Magát az egyenlőtlenséget nem kell felírni.)

Akkor és csak akkor, ha u és w egyike a másik **nemnegatív** skalárszorosa.

10. Mi a **definíciója** annak, hogy a Q kvadratikus alak pozitív szemidefinit? **Nem** a sajátértékekkel vagy az aldeterminánsokkal való jellemzést kérdezzük!

$Q(v) \geq 0$ minden v-re, **és** van olyan $v \neq 0$, melyre $Q(v) = 0$.