Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 1. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2012. jún. 1.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben két vektor és egy skalár szerepel?

$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

12. Adjuk meg a sík egy részhalmazát, mely összeadásra zárt, de (valós) skalárral szorzásra nem.

Pl. az első síknegyed. Vagy: az egész koordinátájú vektorok.

13. Adjunk meg három x^2-et tartalmazó kétdimenziós alteret a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében. Szabad generált altérként is megadni.

Pl. $\langle x^2, 1\rangle$, $\langle x^2, x\rangle$, $\langle x^2, x+1\rangle$.

14. Legyen $b_1 = (1,1)$ és $b_2 = (1,2)$. Adjuk meg ebben a bázisban a $(2,1)$ vektor koordináta(oszlop)vektorát.

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

15. Ha egy vektortérben van négyelemű összefüggő generátorrendszer és kételemű független rendszer is, akkor mik a dimenzió lehetséges értékei?

2 vagy 3

16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, S, L, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) Vektortéraxióma.
(S) A összegtartó.
(L) A skalárszoros-tartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:}\quad \begin{array}{ll} \text{4 v. 3 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
(\lambda A)(v+w) &= \quad \boxed{\text{D}} \\
\lambda\big(A(v+w)\big) &= \quad \boxed{\text{S}} \\
\lambda\big(A(v)+A(w)\big) &= \quad \boxed{\text{A}} \\
\lambda\big(A(v)\big)+\lambda\big(A(w)\big) &= \quad \boxed{\text{D}} \\
(\lambda A)(v)+(\lambda A)(w) &
\end{aligned}$$

18. Ha A lineáris leképezés és $A(v) = 3v$, akkor mennyi $A^2(2v)$?	$18v$
19. Mi az $y = x$ egyenesre való tükrözés determinánsa?	-1
20. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli mátrix rangja 1. Mik a sajátértékei?	Csak a 0.
21. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{3\times 3}$-beli mátrixnak az 1 és 2 is sajátértéke. Mi lehet a minimálpolinomja?	$(x-1)^2(x-2)$ vagy $(x-1)(x-2)^2$
22. Melyik $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli mátrix minimálpolinomja $x - i - 1$?	$\begin{pmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & i+1 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a b szám lehetséges valós értékei?	$b \neq 0$
24. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. Mik a c szám lehetséges valós értékei?	$c = 1$
25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a d szám lehetséges valós értékei?	$d = \pm 1$
26. Ha $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke 2, akkor mennyi $\left\|(z, i, 2)^T\right\|$?	3
27. Ha $a^2 + b^2 = 2$ és $c^2 + d^2 = 3$, akkor mi lesz $ac + bd$ minimális értéke? Itt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.	$-\sqrt{6}$
28. $\begin{pmatrix} e & f \\ g & 1/2 \end{pmatrix}$ egy egybevágósági transzformáció mátrixa $\mathbb{R}$ fölött. Mik az f szám lehetséges valós értékei?	$f = \pm\sqrt{3}/2$
29. Egy mátrix egyszerre önadjungált és unitér. Mely komplex számok lehetnek a sajátértékei?	± 1
30. Egy valós kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix}$. Mi a kvadratikus karaktere?	indefinit