

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben két vektor és egy skalár szerepel?

12. Adjuk meg a sík egy részhalmazát, mely összeadásra zárt, de (valós) skalárral szorzásra nem.

13. Adjunk meg három x^2 -et tartalmazó kétdimenziós alteret a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében. Szabad generált altérként is megadni.

14. Legyen $b_1 = (1, 1)$ és $b_2 = (1, 2)$. Adjuk meg ebben a bázisban a $(2, 1)$ vektor koordináta(oszlop)vektorát.

15. Ha egy vektortérben van négyelemű összefüggő generátorrendszer és kételemű független rendszer is, akkor mik a dimenzió lehetséges értékei?

- 16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, S, L, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) Vektortéraxióma.

(S) A összegtartó.

(L) A skalárszoros-tartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;
2 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v + w) = \square$$

$$\lambda(A(v + w)) = \square$$

$$\lambda(A(v) + A(w)) = \square$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(A(w)) = \square$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

18. Ha A lineáris leképezés és $A(v) = 3v$, akkor mennyi $A^2(2v)$?

19. Mi az $y = x$ egyenesre való tükrözés determinánsa?

20. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -beli mátrix rangja 1. Mik a sajátértékei?

21. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -beli mátrixnak az 1 és 2 is sajátértéke. Mi lehet a minimálpolinomja?

22. Melyik $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -beli mátrix minimálpolinomja $x - i - 1$?

23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizálható \mathbb{C} fölött. Mik a b szám lehetséges valós értékei?

24. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható \mathbb{R} fölött. Mik a c szám lehetséges valós értékei?

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható \mathbb{C} fölött. Mik a d szám lehetséges valós értékei?

26. Ha $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke 2, akkor mennyi $\|(z, i, 2)^T\|$?

27. Ha $a^2 + b^2 = 2$ és $c^2 + d^2 = 3$, akkor mi lesz $ac + bd$ minimális értéke? Itt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

28. $\begin{pmatrix} e & f \\ g & 1/2 \end{pmatrix}$ egy egybevágósági transzformáció mátrixa \mathbb{R} fölött. Mik az f szám lehetséges valós értékei?

29. Egy mátrix egyszerre önadjungált és unitér. Mely komplex számok lehetnek a sajátértékei?

30. Egy valós kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix}$. Mi a kvadratikus karaktere?