

Bsc algebra2 gyakorlat

Néhány feladat eredménye

V/7. $b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ ONB W -ben. Az ortogonalizációt $(1, 2, 3, 4)$ -gyel folytatva $w = (5/2, 5/2, 5/2, 5/2)$, aminek a hossza, és így a keresett távolság 5, továbbá $b_4 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

Második megoldás: A W altér a $v = (1, 1, 1, 1)$ vektorra merőleges vektorok halmaza. Legyen $(1, 2, 3, 4) = \lambda(1, 1, 1, 1) + u$, ahol $u \in W$. Ezt skalárisan v -vel szorozva $v \perp u$ miatt $1 + 2 + 3 + 4 = 4\lambda$, ahonnan $\lambda = 5/2$ és $u = (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2)$. Az $(1, 2, 3, 4)$ távolsága W -től (azaz a W -re vett merőleges vetületétől) a λv hossza, azaz 5. \square

V/9. A négyzetösszeg alakok a következők.

$$x^2 - xy + y^2 = (1/2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (3/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2, \text{ pozitív definit.}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

pozitív szemidefinit (a 0 is sajátérték).

$$x^2 - 3xy + y^2 = -(1/2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (5/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2, \text{ indefinit.}$$

$$x^2 + xy = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1-\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2,$$

indefinit.

$$-x^2 + 10xy - y^2 - z^2 = -6\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2,$$

indefinit.

$$xy + yz = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x+\sqrt{2}y+z}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x-\sqrt{2}y+z}{2}\right)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték).

$$xy + xz + yz = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1/2)\left(\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\right)^2,$$

indefinit. Itt vigyázni kell, mert a $-1/2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér kétdimenziós, ebben a Gram-Schmidt-eljárással adtuk meg ONB-t (ami nem is egyértelmű).

$$-x^2 + 2xy + 2xz = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{-2x+y+z}{\sqrt{6}}\right)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték). \square

V/10. Egyik sem négyzetösszeg alak, mert abban az együtthatókból képzett vektoroknak bázist kell alkotniuk. Az első felírásból így is látszik, hogy ez az alak pozitív definit. \square

V/13-14. A nem normális (a mátrixa egy Jordan-blokk, nem ortonormált bázisban sem diagonalizálható). B unitér, így normális, de nem önadjungált (valóban ortogonális, de nem szimmetrikus). C nem normális, de azért nem ortonormált bázisban diagonalizálható (ez egy nem merőleges vetítés). D önadjungált, így normális, de nem unitér (valóban szimmetrikus de nem ortogonális). E normális, de se nem önadjungált, se nem unitér. F ortogonális és szimmetrikus is. G és H ortogonális, de nem szimmetrikus. \square