Bsc algebra2 gyakorlat

Ötödik feladatsor (2012/I, 7., 8. és 9. előadás)

1. Határozzuk meg az alábbi két pontpár távolságát: $(0,1,1)$ és $(1,0,1)$; $(1,1,i)$ és $(0,i,1)$. Számítsuk ki az első két vektor szögét és a második két vektor skaláris szorzatát is.

2. Igazoljuk, hogy $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$ és $b_1 = (1,-1)/\sqrt{2}$ ONB $\mathbb{C}^2$-ben is. Adjuk meg ebben $(1,2)$ és $(1,i)$ koordinátáit, majd számítsuk ki a hosszukat a régi és az új koordinátákból is.

3. Bizonyítsuk be tetszőleges valós euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításáról van szó? Melyek igazak komplex felett is?

(1) $x \perp z \iff \|x+z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$.
(2) $\|x\| = \|z\| \iff x+z \perp x-z$.
(3) $\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2$.

4. Legyen α_n, illetve β_n az a szög, amelyet az n-dimenziós egységkocka testátlója egy éllel, illetve egy ($n-1$-dimenziós) lappal bezár. Számítsuk ki α_4, β_4 és $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ értékét.

5. Mennyi $a+2b+3c+4d$ maximuma, ha $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$?

6. Legyen W a térben az $x+y-z=0$ egyenletű sík. Adjunk meg W-ben a Gram–Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.

7. Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1,2,3,4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

---

8. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az $u^T A u$ szorzatot.

9. Írjuk föl az alábbi kvadratikus alakok szimmetrikus mátrixát, hozzuk őket négyzetösszeg alakra, és határozzuk meg a karakterüket: x^2+y^2, x^2-y^2, xy, $x^2-2xy+y^2$, x^2-xy+y^2, $x^2-3xy+y^2$, x^2+xy, $-x^2+10xy-y^2-z^2$, $xy+yz$, $xy+yz+xz$, $-x^2+2xy+2xz$.

10. Négyzetösszeg alakú-e az $x^2+y^2+(x+y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x-y)^2$ kvadratikus alak? Mi a karaktere (és az értékkészlete)?

11. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $u^T = (x_1, x_2, x_3)$ és $v^T = (y_1, y_2, y_3)$. Számítsuk ki az $u^* A v$ mátrix-szorzatot, továbbá a $\langle A^* u, v\rangle$ és $\langle u, Av\rangle$ skaláris szorzatokat.

---

12. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

13. A $\mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix}, \quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

14. Tekintsük $\mathbb{R}^4$-en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix},\quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix},\quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusakhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisakhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixra az előadáson szerepelt tételnek megfelelő, forgatásokat és ± 1-et tartalmazó blokkokra bomlik.

15. Bizonyítsuk be az alábbiakat.

(1) Ha $Av=\lambda v$ és $A^*w=\mu w$, akkor $\overline{\lambda}=\mu$ vagy $v\perp w$.
(2) $\operatorname{Ker} A^*=(\operatorname{Im} A)^\perp$ és $\operatorname{Im} A^*=(\operatorname{Ker} A)^\perp$.
(3) $AA^*=0 \implies A=0$.

---

16. Igazoljuk, hogy ha b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 ONB, akkor $\langle b_1,b_2,b_3\rangle^\perp=\langle b_4,b_5\rangle$.

17. Legyen $U\leq\mathbb{R}^4$ azon vektorok halmaza, melyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével. Adjunk meg U-ban egy ONB-t, határozzuk meg $U^\perp$ elemeit, végül írjuk fel az $(1,0,0,0)$ vektort egy U-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként.

---

18. Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van; ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő; különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

19. Mutassuk meg, hogy A minden sajátalterének minden altere, továbbá $\operatorname{Im}(A)$ és $\operatorname{Ker}(A)$ is A-invariáns altér.

20. Legyen A a deriválás a legfeljebb harmadfokú polinomok terén. Határozzuk meg A invariáns altereit.

21. Határozzuk meg egy 4×4-as Jordan-blokk invariáns altereit. Függ-e a válasz attól, hogy mi a blokkban szereplő sajátérték?

22. Milyen kapcsolatban állnak A és A^* karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja, sajátértékei, sajátalterei, invariáns alterei?

23. Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?

24. Mutassuk meg, hogy ha $AB=BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\operatorname{Im}(A)$ és $\ker(A)$ is B-invariáns altér.

---

25. Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M-nek.

26. Mutassuk meg, hogy ha $M\in\mathbb{C}^{n\times n}$ és $M^k=E$, akkor M diagonalizálható.

27. *(*)* Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.

28. *(*)* Legyen A egy $n\times n$-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy $A^n=0$.

29. *(*)* Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?