**Bsc algebra2 gyakorlat**

*Negyedik feladatsor (2012/I, 5. és 6. előadás)*

**1.** Határozzuk meg a 2. feladatsor **17**/($a$) feladatában szereplő mátrixok és transzformációk; egy általános diagonális mátrix; valamint az alábbi mátrixok minimálpolinomját, rangját és Jordan-alakját. Az utolsó sor mátrixai közül melyek hasonlók?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**2.** Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző? Hogyan látszik a minimálpolinomról, hogy a transzformációnak létezik inverze?

**3.** Van-e olyan mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $x^4 - x^2$ és a minimálpolinomja ($a$) $x^2 - x$; ($b$) $x^3 - x$; ($c$) $x^4 - x^2$?

**4.** Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet. Igazoljuk, hogy ha $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, akkor $M^{2011} = 0 \implies M^2 = 0$. Igaz ez $\mathbb{Q}^{3\times 3}$-ban is?

---

**5.** Határozzuk meg $\{x-1,\ x^2-3x+2,\ x^2-6x+5\}$ és $\{x^2+2x+2,\ 2x^2-3x+6,\ 3x^2-8x+10\}$, valamint az 1. feladatsor **7.** feladatában szereplő vektorrendszerek rangját.

**6.** Bizonyítsuk be, hogy ha $A$ és $B$ lineáris leképzések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A+B) \le r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.

**7.** Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 8 rangú, $13 \times 21$-es valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangja hét lesz, akkor felfallak.” Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulni?

A királylány húga már tökéletesen tudja az algebrát, a sárkány őt is meglátogatta. „Neked egy 8 rangú $8\times 8$-as mátrixot kell most azonnal felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát a most felírt mátrixot már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány húga életben maradt-e?

---

**8.** Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.

(1) $a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ (Fibonacci-sorozat).
(2) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.
(3) $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ ($k \ge 0$).