

Bsc algebra2 gyakorlat

Harmadik feladatsor (2012/I): gyakorló feladatok az elméleti anyaghoz

1. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n -dimenziós V vektortérben?
 - (a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
 - (b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
 - (c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
 - (d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - (e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - (f) Ha F elemszáma n , és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
 - (g) Ha G elemszáma n , és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
 - (h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
 - (i) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.
2. Legyen $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$. Melyek igazak?
 - (a) $\text{Ker}(A) = V_1 \implies \text{Im}(A) = \{0\}$.
 - (b) $\text{Ker}(A) = \{0\} \implies \text{Im}(A) = V_2$.
 - (c) $\text{Im}(A) = V_2 \implies \text{Ker}(A) = \{0\}$.
 - (d) Ha egy X vektorrendszer képe generátorrendszer, akkor X is az.
 - (e) Ha egy X vektorrendszer képe független, akkor X is az.
 - (f) Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.
 - (g) Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.
 - (h) Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.
 - (i) Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.
3. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
 - (a) Ha u sajátvektora A -nak, és B -nek, akkor $A + B$ -nek is.
 - (b) Ha λ sajátértéke A -nak, és B -nek, akkor $A + B$ -nek is.
 - (c) Két sajátvektor összege is sajátvektor.
 - (d) Ha λ sajátértéke A -nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2 -nek.
 - (e) Ha λ^2 sajátértéke A^2 -nek, akkor λ sajátértéke A -nak.
 - (f) Ha 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor 0 sajátértéke A -nak.
4. Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció invertálható-e?
5. Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P -re tükröz.
6. Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k -szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?