Bsc algebra2 gyakorlat

Első feladatsor (2012/I, 1. és 2. előadás)

Követelmények Kiss Emil csoportjaiban. A két évfolyamzárthelyit legalább $12-12$ pontosra kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. **Ezen kívül a gyakorlatokon írt röpdolgozatokból is megfelelő eredményt kell elérni.** Az első tanítási hét, valamint a ZH heteinek kivételével mindegyik gyakorlaton van röpdolgozat, a *megelőző* heti előadás anyagából egy definíciót vagy tételt kell **precízen** leírni (segédeszköz használata nélkül). Ez 8 alkalom, 7 pontot kell elérni ahhoz, hogy a gyakorlati jegy ne legyen elégtelen. A röpzéhákon elért összpontszám számít a gyakorlati jegy kerekítésénél, illetve a javító engedélyezésénél. A teljesen helyes válaszra 2 pont, az apró hibákkal tarkítottra 1 pont jár. Általános információk, feladatsorok, az előadás letölthető formában: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard`. Elérhetőség: `ewwkiss@gmail.com`.

1. Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?

(1) $V = T[x]$ a T test fölött és W (1) a legfeljebb tizedfokúak és a zéruspolinom; (2) a legalább tizedfokúak és a zéruspolinom; (3) a páros fokú polinomok és a zéruspolinom; (4) azok a polinomok, ahol minden tag foka páros.

(2) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ az $\mathbb{R}$ fölött, W azok a mátrixok, melyeknek (5) minden eleme racionális; (6) determinánsa nulla; (7) van két azonos eleme; (8) az első sor első két eleme azonos; (9) az elemek összege nulla; (10) az elemek szorzata nulla; (11) az elemek összege 3; (12) az elemek négyzetösszege 0.

(3) V a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ fölött, és $W = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

(4) V a sík $\mathbb{R}$ fölött, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója. Adjuk meg ebben a vektortérben az összes alteret.

2. Legyen W altere az $\mathbb{R}$ fölötti V vektortérnek, és $u, v \in V$.

(1) Ha $u \in W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + v$?

(2) Ha $u \notin W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + v$?

(3) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?

(4) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + 9v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?

Minden nem igaz állításra adjunk is ellenpéldát.

3. ***(*)*** Legyen V vektortér a T test fölött. Mikor lesz két altér uniója is altér?

---

4. Igaz-e $\mathbb{R}$ fölött, hogy $x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2\rangle$? És $\langle x, x^2+2, x+2\rangle = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$?

5. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?

6. Mi az üres halmazt tartalmazó legszűkebb altér? Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.

---

7. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

(a) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.

(b) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.

(c) A $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$, illetve $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$.

8. Igazoljuk az alábbiakat.

(a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.
(c) Két vektor pontosan akkor összefüggő, ha valamelyik a másiknak skalárszorosa.
(d) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.
(e) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

9. Adjunk meg négy olyan összefüggő vektort, amelyek közül bármely három független.

10. Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.

---

11. Az alábbiak közül melyik bázis és melyik ortonormált is $\mathbb{R}^2$-ben? (a) $(1, 1)$ és $(2, 2)$; (b) $(0, 1)$ és $(1, 1)$; (c) $(1, 1)$ és $(1, -1)$; (d) $(1, 1)/\sqrt{2}$ és $(1, -1)/\sqrt{2}$. Írjuk föl az $(1, 2)$ koordinátáit a (b)- és (d)-beli bázisban is.

12. Melyik bázis $\mathbb{R}^3$-ben? (a) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$; (b) $\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (3, 2, 1)\}$; (c) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 3, 9)\}$; (d) $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$. Amelyik bázis, abban adjuk meg az $(1, 0, 0)$ koordinátáit.

13. ***(*)*** A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?

---

14. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.

(a) A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.
(b) A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.
(c) A $T^{2\times 3}$ a T test felett.
(d) A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?
(e) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.
(f) Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.
(g) A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.
(h) Azon legfeljebb negyedfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek $\sqrt{2}$ gyöke.

15. Hánydimenziós $\mathbb{R}[x]$-nek az $\langle x - 1, x^2 - 3x + 2, x^2 - 6x + 5\rangle$ altere?

16. Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n - 1$-dimenziós altere van.

17. ***(*)*** Hány altere van a $\mathbb{Z}_2$ test fölötti $\mathbb{Z}_2^2$ és $\mathbb{Z}_2^3$ vektortereknek? És a $\mathbb{Z}_7$ fölötti $\mathbb{Z}_7^2$-nek?

18. Adjuk meg az alábbi esetekben $\mathbb{R}^4$ megadott két alterének összegét és metszetét.

(a) Az első három, illetve az utolsó három koordináta ugyanaz.
(b) Az első három, illetve az utolsó három koordináta összege nulla.
(c) Minden koordináta egyenlő, illetve a koordináták összege nulla.

19. ***(*)*** Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

---

20. Igazoljuk, hogy ha egy vektortérben $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.