Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2012. december 7.) — eredmények és pontozás

1. Az első indexek szerint rendezve $a_{1,6}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,4}a_{6,1}$ adódik (1 pont). Az inverziók száma ebben 11 (2 pont), ezért az előjel $-$ (1 pont).

2. A szokásos algoritmussal számolva a hányados $x^2/2 + (1/4)$, a maradék $5/4$.

3. A mátrix négyzete, illetve inverze

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ (2 pont), illetve } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (2 pont).}$$

4. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = -3/2$, $\sigma_2 = 1/2$, $\sigma_3 = 1/2$, $\sigma_4 = c/2$ (2 pont). A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5/4$ (1 pont), a gyökök reciprokainak összege $\sigma_3/\sigma_4 = 1/c$, vagyis az eredmény $c = 4/5$ (1 pont).

5. A racionális gyöktesztből adódik, hogy $x = -2$ gyök (2 pont), a gyöktényezőt például a Horner-elrendezéssel kiemelve az $(x+2)(x^5 + 3x^4 + 3$ felbontást kapjuk (2 pont). Az első tényező irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mert elsőfokú, a második tényező is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt, ha azt $p = 3$-ra alkalmazzuk (2 pont).

6. Az utolsó oszlop szerint kifejtve

$$-b\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 2 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} \text{ adódik (1 pont).}$$

Folytatva a számítást például a Sarrus-szabállyal az eredmény $b^4 - 6b^2 + 4b$ (2 pont). (Ha $b = 1$, akkor ennek értéke -1.) Az inverz mátrix aldeterminánsos képletéből látjuk, hogy az inverz mátrix keresett elemének meghatározásához éppen a fenti 3×3-as determinánst kell kiszámolni, előjelezni, és a mátrix determinánsával osztani. Az eredmény $1/b = 1$ (3 pont).

7. A maradék $ax + b$ alakú, ahol a és b racionális számok, hiszen az osztó másodfokú (1 pont). Az $x^{100} - x^{50} + 1 = q(x)(x^2 + x + 1) + (ax + b)$ egyenlőségbe akarjuk $x^2 + x + 1$ gyökeit behelyettesíteni (1 pont). Mivel $x^2 + x + 1 = (x^3 - 1)/(x - 1)$, ezek a gyökök azok az $\varepsilon = -(1/2) + i\sqrt{3}/2$ és $\varepsilon^2 = -(1/2) - i\sqrt{3}/2$ harmadik egységgyökök, amik 1-től különböznek (1 pont). Ekkor $\varepsilon^3 = 1$, ezért $\varepsilon^{100} = \varepsilon$ és $\varepsilon^{50} = \varepsilon^2$ (1 pont). Ezért $\varepsilon^{100} - \varepsilon^{50} + 1 = 1 + i\sqrt{3}$ (1 pont). Mivel a és b valós, az $a\varepsilon + b = 1 + i\sqrt{3}$ egyenletben valós és képzetes részt véve $a = 2$ és $b = 2$, tehát a keresett maradék $2x + 2$ (1 pont).

8. Bontsuk mindkét polinomot $\mathbb{C}$ fölött gyöktényezők szorzatára. Az $x^{15} - 1$ gyökei a 15-ik egységgyökök, mindegyik egyszeres (1 pont). Az $(x^2 + x + 1)^2$ gyökei az előző megoldásban szereplő ε és ε^2, mindegyik kétszeres (2 pont). Az ε és ε^2 gyöke az $x^{15} - 1$ polinomnak, mert $\varepsilon^3 = 1$ (1 pont). Ezért a kitüntetett közös osztóban az $(x - \varepsilon)$ és $(x - \varepsilon^2)$ gyöktényezők első hatványon szerepelnek és más gyöktényezője nincs (1 pont), azaz a végeredmény $x^2 + x + 1$ (1 pont).