Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2012. október 19.) — eredmények és pontozás

1. Legyen $w = x+yi$, ekkor $|\overline{w+1}+i|^2 = (x+1)^2+(1-y)^2$ (1 pont) és $\mathrm{Re}(w+1) = x+1$, vagyis $(1-y)^2 \leq 0$, ezért $y = 1$ (1 pont), továbbá $x+1 \geq 0$, hiszen az abszolút érték nemnegatív (1 pont). Ezért a keresett alakzat egy zárt, vízszintes félegyenes, a helyes ábrázolásért jár az utolsó 1 pont.

2. A megoldóképletet alkalmazva a négyzetgyök alatti szám $-8-6i$ (1 pont), aminek a négyzetgyöke $\pm(1-3i)$ (2 pont). Ezért a gyökök $2-i$ és $1+2i$ (1 pont).

3. $-7+7\sqrt{3}i$ hossza 14, szöge $120°$ (2 pont). Az ötödik gyökök értéke (zárójelben a megfelelő síknegyed): $\sqrt[5]{14}(\cos 24° + i\sin 24°)$ (I); $\sqrt[5]{14}(\cos 96° + i\sin 96°)$ (II); $\sqrt[5]{14}(\cos 168° + i\sin 168°)$ (II); $\sqrt[5]{14}(\cos 240° + i\sin 240°)$ (III); $\sqrt[5]{14}(\cos 312° + i\sin 312°)$ (IV) (2 pont).

4. Az általános megoldás $(4z-7, 3z-6, z)$ (3 pont). Nyilván x, y, z akkor és csak akkor egész, ha z egész. Ezek között $x+y+z = 8z-13$ akkor lesz a legkisebb pozitív egész, ha $z = 2$, a megfelelő megoldás $(1,0,2)$ (3 pont).

5. A racionális gyökteszttel számolva a lehetőségek ±1, $\pm1/3$ és $\pm1/9$ (1 pont). A $-1/3$ gyök lesz (1 pont), a Horner-elrendezéssel kiemelve $(3x+1)(3x^3+x^2+3x+1)$ adódik (1 pont). Ennek is gyöke $-1/3$, ezt kiemelve $(3x+1)^2(x^2+1)$-et kapunk (2 pont). A másodfokú egyenlet gyökei $\pm i$, ezért a keresett gyöktényezős alak

$$9\big(x+(1/3)\big)^2(x+i)(x-i) \text{ (1 pont).}$$

6. Legyen $f(x) = (x-i)^3 g(x)$, ahol $g(i) \neq 0$ (1 pont). Mivel $x^2+1 = (x-i)(x+i)$, ezért

$$(x^2+1)f(x) + (x^2+1)^2 = (x-i)^2[(x^2+1)(x-i)g(x) + (x+i)^2] \text{ (3 pont).}$$

A szögletes zárójelben álló polinomnak nem gyöke az i, mert i-t behelyettesítve $4i^2 = -4 \neq 0$ adódik (1 pont). Ezért $(x^2+1)f(x)+(x^2+1)^2$-nek az i kétszeres gyöke (1 pont).

7. A binomiális tétel miatt a szumma értéke $(z-1)^{225}$ (2 pont). Ez viszont

$$(\cos 1° + i\sin 1°)^{225} = \cos 225° + i\sin 225° \text{ (2 pont).}$$

Ennek valós és képzetes része is $-\sqrt{2}/2$ (2 pont).