Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jan. 30.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk egy (egyváltozós) polinom fokának a fogalmát. Mely polinomoknak nincs foka?

> Az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ foka n, ha $a_n \neq 0$. A nullapolinomnak nincs foka.

2. Mondjuk ki $\mathbb{C}$ fölött a polinomok azonossági tételét, azt is megfogalmazva, hogy mit jelent két polinom egyenlősége.

> Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$, és a hozzájuk tartozó polinomfüggvények egyenlők,
> azaz minden $r \in \mathbb{C}$ esetén $f(r) = g(r)$, akkor $f = g$,
> vagyis az f és g polinomok megfelelő együtthatói megegyeznek.
>
> (A feltétel úgy is szólhat, hogy a két polinom a fokszámuknál több helyen megegyezik.)

3. Mondjuk ki azt az azonosságot, amely azt fejezi ki, hogy a komplex konjugálás szorzattartó.

> Ha $w, z \in \mathbb{C}$, akkor $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$.

4. Írjuk föl trigonometrikus alakban az n-edik **primitív** komplex egységgyököket.

> $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$ és $(k, n) = 1$.

5. Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{C}^{a\times b}$ és $N = ((n_{ij})) \in \mathbb{C}^{b\times c}$. Írjuk föl az MN szorzatmátrix u-adik sorának w-edik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

> $\sum_{\ell=1}^{b} m_{u\ell} n_{\ell w} = m_{u1}n_{1w} + \ldots + m_{ub}n_{bw}$

6. Legyen $f \in S_n$ és $1 \leq i < j \leq n$. Mit jelent az, hogy $f(i)$ és $f(j)$ inverzióban vannak az f permutációnál?

Azt, hogy $f(i) > f(j)$.

7. Jellemezzük egy négyzetes mátrix invertálhatóságát a determinánsa segítségével.

Egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

8. Mondjuk ki a maradékos osztás tételének **egyértelműségi** állítását $\mathbb{R}[x]$-ben. A létezést nem kell megfogalmazni.

Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$, ahol $g \neq 0$, és $f = gq_1 + r_1 = gq_2 + r_2$, ahol $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}[x]$, $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$ vagy $r_1 = 0$ és $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$ vagy $r_2 = 0$, akkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

9. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinomjainak leírását ($\mathbb{Q}[x]$-re való visszavezetéssel). A primitív polinom fogalmát nem kell definiálni.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans $\mathbb{Z}$-beli prímszám, vagy pedig primitív és $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis.

10. Mondjuk ki a hatvány rendjének képletét.

$$o(z^n) = \frac{o(z)}{\big(o(z), n\big)}$$