Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. jan. 30.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Mely z komplex számokra teljesül, hogy minden 1 abszolút értékű $w \in \mathbb{C}$ esetén $\overline{(z/w)} = -zw$?

    z tisztán képzetes.

12. Hány olyan $z \in \mathbb{C}$ szám van, amelynek van közös negyedik gyöke az i-vel?

    1

13. Mennyi $(-1 + i\sqrt{3})^{2012}$ szöge?

    240°

14. Hányadik primitív egységgyök lesz a $\cos 252° + i \sin 252°$ szám **négyzete**?

    5

15. Hány megoldása lehet valós fölött egy ötismeretlenes, három egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek?

    0 vagy végtelen sok.

16. Legyen $v = \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ és $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Számítsuk ki az $iv - (2/i)w$ vektort.

    $\begin{pmatrix} -2+8i \\ 13i \end{pmatrix}$

17. Egy 1000×1000-es M felső háromszögmátrixban minden elem 2-vel egyenlő, ami nincs a főátló alatt. Mennyi az M^5 mátrixban a főátlóbeli elemek összege?

    32000

18. A 6×6-os A mátrix determinánsa 2. Jelölje A_{ij} az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst. Mennyi az $((A_{ij}))$ mátrix determinánsa?

    32

19. Mennyi S_{100}-ban annak a transzpozíciónak az előjele, amely a 23 és a 78 elemeket cseréli ki?

    -1

20. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a 2×2-es valós mátrixok gyűrűje nem nullosztómentes.

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nem nulla, de a négyzete nulla.

21. Adjunk példát olyan kilencedfokú, valós együtthatós polinomra, amelynek nem létezik gyöktényezős alakja $\mathbb{R}$ fölött.

    Pl. $x^7(x^2+1)$

22. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $z \in \mathbb{C}$ szám négyszeres gyöke, akkor f-nek $\overline{z}$ is négyszeres gyöke.

    Pl. $(x-i)^4$

23. Adjunk meg egy olyan tizedfokú $\mathbb{Z}_5[x]$ fölötti polinomot, amelyhez ugyanaz a polinomfüggvény tartozik $\mathbb{Z}_5$ fölött, mint $x^9+2 \in \mathbb{Z}_5[x]$-hez.

    Pl. $x^9+2+x^{10}-x^6$.

24. Mennyi lehet x együtthatója egy olyan normált harmadfokú polinomban, melynek 2 és 3 gyöke, és más komplex gyöke nincs?

    16 vagy 21

25. Mi lesz a maradék, ha $x^{2013}+x-2$-t osztjuk maradékosan $x-i$-vel?

    $2i-2$

26. Mennyi $(x-1)^6(x-i)^2(x+2)^4$ és $(x-1)^4(x+i)^2(x+2)^6$ kitüntetett közös osztója?

    $(x-1)^4(x+2)^4$

27. Adjunk példát, mely azt mutatja, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritérium nem marad érvényben, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy a konstans tag nem osztható p^2-tel.

    Pl. x^2-4

28. Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, mely $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ fölött nem.

    Pl. 3

29. Mely $r \in \mathbb{Z}$ esetén irreducibilis x^2+rx+1 a racionális számok teste fölött?

    $r \neq 2$ **és** $r \neq -2$

30. Végezzük el az $x^3+1 : x^2+1$ maradékos osztást $\mathbb{Z}_2$ fölött. Mennyi a maradék?

    $x+1$