Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jan. 22.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki az f és g polinomok összegének fokáról szóló állítást **abban az esetben, amikor** $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$.

Ha $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$, akkor $\mathrm{gr}(f+g) = \max\big(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)\big)$.

2. Mit jelent az, hogy egy polinomnak van gyöktényezős alakja egy T test fölött?

Azt, hogy felírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol $c, b_1, \dots, b_n \in T$.

3. Mondjuk ki azt az azonosságot, amely azt fejezi ki, hogy a komplex konjugálás hányadostartó.

Ha $w, z \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $\overline{w/z} = \overline{w}/\overline{z}$.

4. Írjuk föl a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ komplex szám n-edik gyökeit megadó képletet.

$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.

5. Definiáljuk, hogy a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer mikor lineárisan független.

Tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

6. Adott egy lineáris egyenletrendszer. Mondjuk ki azt a két feltételt, amely szükséges ahhoz, hogy a Cramer-szabály alkalmazható legyen (a megoldás képletét nem kell felírni).

Az egyenletrendszer mátrixa négyzetes, és determinánsa nem nulla.

7. Mondjuk ki a komplex gyök konjugáltjának multiplicitásáról szóló tételt (azt is beleértve, hogy milyen együtthatós polinomokra érvényes ez).

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor α és $\overline{\alpha}$ ugyanannyiszoros gyökei f-nek.

8. Definiáljuk az n-változós σ_k elemi szimmetrikus polinomot (ami egy n-edfokú polinom gyökeinek és együtthatóinak összefüggésében szerepel). Hány tagja van ennek?

Az $x_1, \ldots, x_n$ változók közül az összes lehetséges módon kiveszünk k darabot, ezeket összeszorozzuk, és a kapott $\binom{n}{k}$ tagot összeadjuk.

9. Definiáljuk $\mathbb{Z}[x]$-ben a primitív polinom fogalmát.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ primitív, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1.

10. Definiáljuk az R szokásos gyűrűben a felbonthatatlan elem fogalmát. Az egység, illetve a triviális felbontás fogalmát nem kell definiálni.

Az $r \in R$ felbonthatatlan, ha nem nulla, nem egység, és minden felbontása triviális.