

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján található.

11. Milyen $z \in \mathbb{C}$ esetén lesz $|\bar{z}| - |z| - i \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) + z$ valós része 0?

Minden z -re.

12. Mekkora lehet a szöge egy olyan nem nulla komplex számnak, amelynek 4 darab 12-edik gyöke esik a második síknegyedbe (a síknegyed határát is beleértve)?

0

13. Az $1+i$ pontot $+90^\circ$ fokkal elforgatjuk. Mennyi lesz a kapott pont távolsága a $2-3i$ ponttól?

5

14. Legyen ε primitív huszadik egységgyök. Határozzuk meg ε^{210} értékét.

-1

15. Adjunk meg olyan háromismeretlenes, két egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, melynek végtelen sok megoldása van.

$$\text{Pl. } x + y + z = 0, \quad 3x + 3y + 3z = 0.$$

16. Mely n egészekre igaz, hogy minden $M \in \mathbb{Q}^{n \times 3}$ mátrixhoz van olyan N mátrix, hogy $MN - M^T$ értelmes?

3

17. Az $M \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ mátrixot tükrözzük a függőleges középvonalára, majd megszorozzuk $2i$ -vel. Hányszorosára változik a determinánása?

$$(-1)^3(2i)^6 = 64$$

18. Írjuk föl az $n \times n$ -es $((a_{ij}))$ determináns utolsó előtti sora szerinti kifejtését. Az i -edik sor j -edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst jelölje A_{ij} .

$$a_{n-1,1}A_{n-1,1} + \dots + a_{n-1,n}A_{n-1,n} = \sum_{k=1}^n a_{n-1,k}A_{n-1,k}$$

19. A 4×4 -es $((a_{ij}))$ determináns második és negyedik sora egyenlő. Az $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

20. Ha MN a kétszer kettős egységmátrix, és $N \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, akkor mennyi lehet M rangja?

2

21. Adjunk példát olyan polinomra, amelynek $1 + i$ és $1 - i$ nem ugyanannyiszoros gyökei.
22. Adjunk meg egy olyan tizedfokú $\mathbb{Z}_7[x]$ fölötti polinomot, amelyhez ugyanaz a polinomfüggvény tartozik \mathbb{Z}_7 fölött, mint $x^9 - 3x^4 + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$ -hez.
23. Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomnak az i szám háromszoros gyöke. Mennyi $c - 3id$?
24. Mi lesz a maradék, ha $x^{1000} + x - 2$ -t osztjuk maradékosan $x - 2$ -vel?
25. Mely $r \in \mathbb{R}$ esetén irreducibilis $2x^2 + rx + 3$ **valós** fölött?
26. Mennyi $x^7 - 1$ és $(x^2 - 1)(x^3 - 2)$ kitüntetett közös osztója?
27. Adjunk példát, mely azt mutatja, hogy a Schönemann-Eisenstein-kritérium nem marad érvényben, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy a főegyüttható nem osztható p -vel.
28. Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, mely \mathbb{Q} fölött irreducibilis, de \mathbb{R} és \mathbb{Z} fölött nem.
29. Mennyi $(3 + 6)/4$ a \mathbb{Z}_7 testben?
30. Vezessük vissza az $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ egyenletet olyan harmadfokú egyenletre, amelyre már alkalmazható Cardano képlete. (Az egyenletet nem kell megoldani, sem a képletet alkalmazni.)

Pl. $x - 1 - i$

Pl. $-3x^{10} + x^9 + 2.$

i

2^{1000}

$|r| < \sqrt{24}(= 2\sqrt{6})$

$x - 1$

Pl. $3x^2 - 3$

Pl. $3x^3 - 6.$

4

$y = x + 1$ helyettesítéssel $y^3 - 3y - 3.$