Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. jan. 22.*

NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Milyen $z \in \mathbb{C}$ esetén lesz $|\overline{z}| - \overline{|z|} - i\,\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) + z$ valós része 0?

12. Mekkora lehet a szöge egy olyan nem nulla komplex számnak, amelynek 4 darab 12-edik gyöke esik a második síknegyedbe (a síknegyed határát is beleértve)?

13. Az $1+i$ pontot $+90°$ fokkal elforgatjuk. Mennyi lesz a kapott pont távolsága a $2-3i$ ponttól?

14. Legyen ε primitív huszadik egységgyök. Határozzuk meg ε^{210} értékét.

15. Adjunk meg olyan háromismeretlenes, két egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, melynek végtelen sok megoldása van.

16. Mely n egészekre igaz, hogy minden $M \in \mathbb{Q}^{n\times 3}$ mátrixhoz van olyan N mátrix, hogy $MN - M^T$ értelmes?

17. Az $M \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ mátrixot tükrözzük a függőleges középvonalára, majd megszorozzuk $2i$-vel. Hányszorosára változik a determinánsa?

18. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns utolsó előtti sora szerinti kifejtését. Az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst jelölje A_{ij}.

19. A 4×4-es $((a_{ij}))$ determináns második és negyedik sora egyenlő. Az $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

20. Ha MN a kétszer kettes egységmátrix, és $N \in \mathbb{R}^{4\times 2}$, akkor mennyi lehet M rangja?

21. Adjunk példát olyan polinomra, amelynek $1+i$ és $1-i$ nem ugyanannyiszoros gyökei.

22. Adjunk meg egy olyan tizedfokú $\mathbb{Z}_7[x]$ fölötti polinomot, amelyhez ugyanaz a polinomfüggvény tartozik $\mathbb{Z}_7$ fölött, mint $x^9 - 3x^4 + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$-hez.

23. Az $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ polinomnak az i szám háromszoros gyöke. Mennyi $c - 3id$?

24. Mi lesz a maradék, ha $x^{1000} + x - 2$-t osztjuk maradékosan $x - 2$-vel?

25. Mely $r \in \mathbb{R}$ esetén irreducibilis $2x^2 + rx + 3$ **valós** fölött?

26. Mennyi $x^7 - 1$ és $(x^2 - 1)(x^3 - 2)$ kitüntetett közös osztója?

27. Adjunk példát, mely azt mutatja, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritérium nem marad érvényben, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy a főegyüttható nem osztható p-vel.

28. Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, mely $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Z}$ fölött nem.

29. Mennyi $(3 + 6)/4$ a $\mathbb{Z}_7$ testben?

30. Vezessük vissza az $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ egyenletet olyan harmadfokú egyenletre, amelyre már alkalmazható Cardano képlete. (Az egyenletet nem kell megoldani, sem a képletet alkalmazni.)