Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jan. 11.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk egy (egyváltozós) polinom fokának a fogalmát. Mely polinomoknak nincs foka?

Az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ foka n, ha $a_n \neq 0$. A nullapolinomnak nincs foka.

2. Mondjuk ki a gyöktényezők **egyszerre** való kiemelhetőségéről szóló tételt (beleértve, hogy milyen tulajdonságú gyűrű fölött érvényes).

Szokásos (azaz egységelemes, kommutatív, **nullosztómentes**) R gyűrű fölött minden nem nulla polinom $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban írható, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ az f-nek az **összes** R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

3. Mikor egyenlőek a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ és $s(\cos\beta + i \sin\beta)$ komplex számok?

Akkor és csak akkor, ha $r = s$ és $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ$ alkalmas k egészre.

4. Mikor teljesül a z és w komplex számokra felírt háromszögegyenlőtlenségben **egyenlőség**? (A háromszögegyenlőtlenséget nem kell felírni.)

Akkor és csak akkor, ha alkalmas $r \geq 0$ valós számra $z = rw$ vagy $w = rz$.

5. Legyen $M = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{k \times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Írjuk föl az MN szorzatmátrix p-edik sorának q-adik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

$a_{p1} b_{1q} + \dots + a_{pm} b_{mq} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{p\ell} b_{\ell q}$

6. Írjuk fel az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns utolsó oszlopa szerinti kifejtését. Az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst jelölje A_{ij}.

$a_{1n}A_{1n} + \ldots + a_{nn}A_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kn}$

7. Definiáljuk az f permutáció előjelét.

Az f előjele $+$, ha f páros sok csere szorzata, és $-$ egyébként.
A „páros sok csere szorzata" helyett az is jó, hogy „páros sok inverziót tartalmaz".

8. Definiáljuk az n-változós σ_k elemi szimmetrikus polinomot (ami egy n-edfokú polinom gyökeinek és együtthatóinak összefüggésében szerepel). Hány tagja van ennek?

Az $x_1, \ldots, x_n$ változók közül az összes lehetséges módon kiveszünk k darabot, ezeket összeszorozzuk, és a kapott $\binom{n}{k}$ tagot összeadjuk.

9. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinomjainak leírását ($\mathbb{Q}[x]$-re való visszavezetéssel). A primitív polinom fogalmát nem kell definiálni.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans $\mathbb{Z}$-beli prímszám, vagy pedig primitív és $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis.

10. Jellemezzük az n-edik primitív egységgyököket a hatványaik halmazával.

Az ε akkor és csak akkor primitív n-edik egységgyök, ha a hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. (Az is elegendő, hogy pontosan n darab hatványa van.)