Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 1. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jan. 4.*

NÉV: ________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és a $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinomok szorzatában az x^k együtthatóját.

$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$

2. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $f(x)$ polinomnak a b szám **pontosan** k-szoros gyöke.

$f(x) = (x-b)^k g(x)$, ahol $g(b) \neq 0$

3. Mondjuk ki azt az azonosságot, amely azt fejezi ki, hogy az abszolút érték a komplex számok körében szorzattartó.

$|zw| = |z|\,|w|$

4. Adjuk meg képlettel a z és w pontok távolságát a komplex számsíkon. (A képletben ne szerepeljen a két szám valós vagy képzetes része.)

$|z - w|$

5. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben. **Vagy:** Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$-beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

6. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Ha M és N is $n \times n$-es mátrix, akkor $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

7. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ mátrix determinánsát **definiáló** képletet (nem a kifejtési tételt!).

$\sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} \ldots a_{nf(n)}$

8. Írjuk föl azt a képletet, amivel az n-edfokú $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom esetében a gyökök σ_k elemi szimmetrikus polinomjának értéke az együtthatókból leolvasható.

$\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$

9. Mondjuk ki **pontosan** a maradékos osztás tételét $\mathbb{R}[x]$-ben. Az egyértelműséget nem kell megfogalmazni.

Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$ és $g \neq 0$, akkor (egyértelműen) létezik olyan $q, r \in \mathbb{R}[x]$, hogy
$f = gq + r$ és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

10. Definiáljuk a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomot a gyöktényezős alakja segítségével (tehát **nem** a rekurziós képletet kell felírni).

$\Phi_n(x) = (x - \eta_1) \ldots (x - \eta_k)$, ahol $\eta_1, \ldots, \eta_k$ az n-edik primitív egységgyökök ($k = \varphi(n)$).