Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 1. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. jan. 4.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor mennyi $\overline{i - 1 + \operatorname{Im}\left(\operatorname{Im}(\overline{z + i - 1})\right)}$?

$-1 - i$

12. Adjunk nem valós példát, ami mutatja, hogy a $|z + w| = |z| + |w|$ azonosság nem igaz $\mathbb{C}$-ben.

Pl. $z = i$ és $w = -i$.

13. Ha $z \neq 0$ tisztán képzetes, akkor mennyi lehet $z(1 - i)$ szöge? Minden lehetséges értéket soroljunk fel.

45°, 225°.

14. Hányadik primitív egységgyök lesz $\cos 176° + i \sin 176°$?

45-ödik

15. Egy három ismeretlenes, öt egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Hány kötött változó lehet? (Minden lehetséges értéket soroljunk fel.)

0, 1, 2

16. Ha $v = \binom{1}{4}$ és $w = \binom{0}{2}$, akkor mennyi $3v - 5w$?

$\binom{3}{2}$

17. Ha $M \in \mathbb{R}^{k \times 5}$, akkor milyen k pozitív egészekre értelmes az $M^T M$ kifejezés?

Minden k-ra.

18. A 6×6-os M mátrix utolsó sorában az utolsó előtti elemhez tartozó nem előjelezett aldetermináns 3, és $\det(M) = 4$. Az M^{-1} melyik elemét tudjuk ebből meghatározni, és az mennyi?

Az M^{-1} ötödik sorának hatodik eleme $-3/4$.

19. Melyik az a legkisebb n egész, amelyre igaz a következő állítás: ha egy 4×4-es determinánsnak n eleme nulla, akkor a determináns értéke is nulla.

13

20. Ha M rangja 2 és N rangja 3, akkor mennyi lehet MN rangja?

0, 1, 2

21. Adjuk meg az összes olyan normált, hatodfokú, valós együtthatós polinomot, melynek $1-i$ és $1-2i$ is gyöke, és van legalább kétszeres gyöke.

$\big(x-(1-i)\big)\big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-2i)\big)^2\big(x-(1+2i)\big)^2$ és
$\big(x-(1-i)\big)^2\big(x-(1+i)\big)^2\big(x-(1-2i)\big)\big(x-(1+2i)\big)$ és
$\big(x-(1-i)\big)\big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-2i)\big)\big(x-(1+2i)\big)(x-r)^2$, ahol r valós.

22. Adjunk példát olyan $f \neq g \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokra, melyekhez egyenlő polinomfüggvény tartozik.

Pl. x és x^5.

23. Egy tizedfokú, normált polinom minden gyökét a kétszeresére változtatjuk. Hogyan változik a kapott normált polinom konstans tagja?

2^{10}-szeresére.

24. Mi lehet a főegyütthatója egy olyan polinomnak, amellyel minden más polinom maradékosan elosztható $\mathbb{Z}[x]$-ben?

1 és -1.

25. Mely $c \in \mathbb{R}$ esetén irreducibilis $cx^6 + cx + 1$ **valós** fölött?

Nincs ilyen c.

26. Legyen $f(x) = 5x^6 + 180x^4 + 540x + 4n$. Keressünk olyan páros n egészet, hogy teljesüljön a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele az f polinomra.

Pl. $n = 6$

27. Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, mely $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{Q}$ fölött nem.

Pl. a konstans 2 polinom.

28. Adjunk példát két olyan negyedfokú polinomra $\mathbb{Z}_{15}$ fölött, melyek szorzata negyedfokú.

Pl. $3x^4 + 1$ és $5x^4$

29. Bontsuk $\mathbb{Z}_3$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^3 + x + 1$ polinomot.

$(x+2)(x^2+x+2)$

30. Hány valós gyöke van az $x^3 - 9x + 4$ polinomnak? Emlékeztetőül Cardano képlete:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

3 (mert $D = (4/2)^2 + (-9/3)^3 < 0$).