

## Bsc algebra1 gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2012. november 27-∞)

- (1.5.15)** Az  $1, -1, i, 1+i, (1+i)/\sqrt{2}, \cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi), \cos(336^\circ) + i\sin(336^\circ)$  számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely  $n$ -ekre lesznek ezek a számok  $n$ -edik egységgyökök? És primitív  $n$ -edik egységgyökök?
- (1.5.18)** Ha  $\varepsilon$  primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet  $o(-i\varepsilon)$ ?
- (3.9.4, 3.9.11)** Számítsuk ki  $\Phi_{12}$ -t és a prímszámindexű körosztási polinomokat.

- 
- (1.1.8, 1.1.9)** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a  $2 : 3$  osztást modulo 5. Tudunk-e osztani  $\mathbb{Z}_5$  minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?
  - (3.3.21)** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat  $\mathbb{Z}_2$  felett.
  - (3.9.22)** Bontsuk az  $x^{12} - 1$  polinomot irreducibilisek szorzatára  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$  és  $\mathbb{Z}_5$  felett.
  - (3.5.9)** Az  $x^4 + x^2 + x + 1$ -t  $\mathbb{Z}_2$  felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis  $\mathbb{Q}$  felett.

### Gyakorló feladatok

- (1.5.17)** Mutassuk meg, hogy ha  $n > 0$  egész,  $\varepsilon \in \mathbb{C}$ , és  $\varepsilon^n = i$ , akkor  $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$ .
- (1.5.19)** Ha  $\varepsilon$  rendje osztható négyvel, mi lesz  $-\varepsilon$  rendje?
- (1.5.20)** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?
- (1.5.21)** Igazoljuk, hogy ha az  $n$ -edik primitív egységgyököket végigszorozzuk az  $m$ -edik primitív egységgyökök mindegyikével, akkor az  $mn$ -edik primitív egységgyököket kapjuk, mindegyiket pontosan egyszer. Vezessük le ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.
- (1.5.9)** Egy bolha ugrál körbe egy  $r$ -szög csúcsain, úgy, hogy minden ugrásnál  $k$  csúcsnyit lép előre. Hány lépés után jut vissza a kiindulópontához? Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen? Vezessük le ebből a hatvány rendjének képletét.
- (3.9.18)** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.
- (3.9.12)** Igazoljuk, hogy ha  $n > 1$  páratlan, akkor  $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ .
- (3.9.15\*)** Legyenek  $m \mid n$  pozitív egészek úgy, hogy  $n$  minden prímszótója osztja  $m$ -et is. Igazoljuk, hogy  $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$ .
- (3.9.16)** Számítsuk ki az előző feladat alapján a  $\Phi_n(x)$ -et, ha  $n = 36, 72, 144, 100$ .
- Hány nullosztó van  $\mathbb{Z}_4$ -ben? Hát  $\mathbb{Z}_4[x]$ -ben?
- Adjunk meg egy olyan másodfokú  $f \in \mathbb{Z}_6[x]$  polinomot, melyre  $(3x+1)f(x)$  foka 2.
- Adjunk példát, ami mutatja, hogy  $\mathbb{Z}_6$  fölött nem igaz a polinomok azonosság tétele.
- Hány olyan legfeljebb negyedfokú polinom van  $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben, mely minden helyen 1?
- Bontsuk  $\mathbb{Z}_2$  fölött gyöktényezőss alakra az  $x^8 + 1$  polinomot.
- Végezzük el az  $(x^6 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$  maradékos osztást  $\mathbb{Z}_2$  fölött.
- Bontsuk  $\mathbb{Z}_2$  fölött irreducibilisek szorzatára az  $x^6 + x^5 + x^2 + 1$  polinomot.