Bsc algebra1 gyakorlat

Hetedik feladatsor (2012. november 20–30)

1. Határozzuk meg Cardano képletének felhasználásával, hogy az $x^3 - 3px + 2$ egyenletnek mely p valós értékek esetében van 1, 2, illetve 3 valós gyöke.

2. ***(2.4.14, HF)*** Adjunk meg a Lagrange- és a Newton-interpoláció segítségével is olyan legfeljebb harmadfokú polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 15$ és $f(-1) = 0$. Oldjuk meg a feladatot lineáris egyenletrendszer felírásával is (az ismeretlenek a keresett polinom együtthatói). Mennyi a kapott egyenletrendszer mátrixának determinánsa?

---

3. ***(2.5.7)*** Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit: $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ és $c(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$.

4. ***(2.5.14)*** Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.

5. ***(2.5.15)*** A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.

6. ***(2.7.16)*** Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a + b$, $a + c$, $b + c$.

7. ***(2.7.15, HF)*** Határozzuk meg az x^n+x+1 polinom (komplex) gyökeinek négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).

---

8. ***(3.1.29)*** Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?

9. ***(3.1.6)*** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.

10. ***(3.2.16)*** Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.

11. ***(3.2.23)*** Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.

12. ***(3.2.24)*** Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 + 1$-gyel, illetve $x^2 - 1$-gyel?

13. ***(3.3.15)*** Mi lesz $x^n - 1$ és $x^m - 1$ legnagyobb közös osztója?

14. Mi lesz $x^5 + 1$ és $x^{15} - 1$ legnagyobb közös osztója?

---

15. ***(3.3.14)*** Bontsuk $6(x^2 - 2)(x^2 + 1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.

16. ***(3.5.4)*** A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ (mely n-ekre?).

17. ***(3.5.5)*** Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c \in \mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy $x^4 + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

18. ***(3.5.6)*** A $6x^4 + 3x + 1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.

19. ***(3.5.10)*** Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x^4 + x + 1$ polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?

Gyakorló feladatok

20. Írjuk fel az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében az első sor második elemét a ferde kifejtési tétel segítségével.

21. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $\det A = 3$, $\det B = 6$, $\det C = 4$. Mennyi lesz az $A^3 B^{-1} C A^{-2}$ mátrix determinánsa?

22. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

23. ***(3.8.6)*** Oldjuk meg Cardano képletével az $x^3 - 6ix - i + 8 = 0$, az $x^3 + 12x - 16i = 0$ és az $x^3 - 21x + 20 = 0$ egyenleteket a komplex számok körében. Kalkulátor nem szükséges, de szabad azzal is számolni, a komplex köbgyökvonást közelítő szögekkel végezve.

24. Írjuk föl a $2x^4 - 4$ polinom gyöktényezős alakját $\mathbb{C}$ fölött.

25. ***(3.3.16)*** Adjuk meg az összes olyan tizenkettedfokú valós együtthatós polinomot, melynek az $1 + i$ hatszoros gyöke.

26. Legyenek x_1, x_2, x_3, x_4 az $x^4 - 2x + 3$ polinom komplex gyökei (a többszörös gyököket, ha vannak, annyiszor felsorolva, ahányszorosak). Számítsuk ki az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ összeget, valamint a gyökök reciprokainak összegét.

27. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke az $1 + i$ és a konstans tagja 2. Mi a másik két gyöke?

28. Fejezzük ki a másodfokú egyenlet együtthatóival a gyökök különbségének négyzetét.

29. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

30. ***(3.2.17)*** Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

31. Bontsuk az $x^{12} - 4096$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

32. Bontsuk $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 2x + 1$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ fölött.

33. ***(3.3.19)*** Irreducibilis-e $x^4 + 4$ illetve $x^4 + 9$ a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!

34. ***(3.3.24)*** Bontsuk fel az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinomot $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is.

35. ***(3.3.22)*** Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x + y)^p - x^p - y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x, y]$-ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.

36. ***(3.5.15)*** Legyen p prím és $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$. Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein az $f(x + 1)$ polinomra?