

Bsc algebra1 gyakorlat
 Ötödik feladatsor (2012. október 9–26)

1. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek **általános** megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + 6z = 14 \\ -3x \quad \quad + 2z = 3 \\ x - 6y + 14z = 31 \end{array} \qquad \text{IHF:} \qquad \begin{array}{l} x - y + z + t = 2 \\ -3x \quad \quad + 3t = 0 \\ -2x - y + z + 4t = 2 \\ 4x - y + z - 2t = 2 \end{array}$$

2. Az alábbi táblázat celláiba írjunk be egy-egy megfelelő n ismeretlenes, m egyenletből álló (minél egyszerűbb) \mathbb{R} feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges), illetve N betűt, ha a megfelelő eset nem fordulhat elő.

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$	Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$				$n < m$			
$n = m$				$n = m$			
$n > m$				$n > m$			

3. Ha egy \mathbb{Q} feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy \mathbb{R} feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?

4. Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes \mathbb{R} -beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet \mathbb{C} felett?

5. Az AB , BA , BC , $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Adjunk meg olyan 10×10 -es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100 -as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez **minden** 10×100 -as C -re teljesüljön?

7. Számítsuk ki az 5×5 -ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ -es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

8. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?

9. Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i -edik sorában a j -edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorozunk $E^{(ij)}$ -vel? Van-e olyan 3×3 -as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3 -as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

10. Az M és N mátrixok **felcserélhető**k, ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$ -mal felcserélhető (lásd az előző feladatot), és azokat is, amelyek **minden** háromszor hármas mátrixszal felcserélhető

Gyakorló feladatok

11. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y + 3z = 2 & 2x + 3y + z = 11 & 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + y + z = 4 & x - y - 2z = -7 & x - y - 2z = -7 \\ 2x - 2y + 3z = 10 & 3x + 2y - z = 2 & 3x + 2y - z = 4 \end{array}$$

12. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

- (1) Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása.
- (2) Ha az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása.
- (3) Ha $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ -re létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.
- (4) Ha $A \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^6$ -ra létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

13. Határozzuk meg, hogy a c paraméter mely valós értékeire lesz 0, 1, illetve 1-nél több valós megoldása az alábbi egyenletrendszernek, majd $c = 2$ esetén adjuk meg z értékét annál a megoldásnál, melynél az xy szorzat értéke a lehető legnagyobb:

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2z = 1 \\ & y & - cz = -1 \\ x + cy & - & 2z = -1 \end{array}$$

14. Adott 2013 szám úgy, hogy közülük bármely 2012 összege 2013. Melyek ezek a számok?

15. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

16. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = (-1 \quad -2 \quad -3), \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges:

$$A + A, \quad A + B, \quad AB, \quad AC, \quad AC^T, \quad DD^T, \quad D^T D, \quad AC + 2C, \quad AD - 3D, \quad D^2, \quad BC, \quad CB.$$

17. Ha $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, akkor mi az N mátrix második sorának harmadik eleme?

18. (*) Az $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix nyoma $\text{tr}(M) = a + d$, determinánsa $\det(M) = ad - bc$.

Igazoljuk a következőket (E az egységmátrix).

- (1) Ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
- (2) Ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)E = 0$.
- (3) Ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor $MN - NM$ nem lehet E .

Adjuk meg $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben az $X^2 = E$, $X^2 = -E$ és $X^2 = 0$ egyenletek mindegyikének minél többféle (végtelen sok) megoldását.