**Bsc algebra1 gyakorlat**

*Harmadik feladatsor (2012. szeptember 25–28)*

**1.** ***(1.3.11)*** Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $|(1+1526i)^{100}/(1-1526i)^{100}|$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{1241}$, $(-1+i\sqrt{3})^3$.

**2.** Mivel egyenlő $i^{2011}$ és $1+i+\ldots+i^{2011}$?

**3.** ***(1.3.12)*** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket: $x^2+1=0$, $x^2=-12$, $x^2+2x+2=0$, $x^2+2ix-1=0$. Írjuk is föl a megfelelő polinomokat gyöktényezős alakban $\mathbb{C}$ fölött.

**4.** ***(1.3.13)*** Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$. Oldjuk meg az $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ egyenletet.

**5.** Tegyük föl, hogy $(x+iy)^n=3+2i$. Mennyi lesz ekkor $(x^2+y^2)^n$?

**6.** Soroljuk föl az első húsz pozitív egész számot, ami nem áll elő két négyzetszám összegeként. Mutassuk meg, hogy ha az $m$ és $n$ egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor $mn$ is előáll így.

**7.** ***(1.4.2, 1.4.8)*** Hozzuk trigonometrikus alakra: $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\cos(30°)-i\sin(60°)$, $\sin\alpha+i\cos\alpha$, $(1+i\operatorname{tg}\alpha)/(1-i\operatorname{tg}\alpha)$.

**8.** ***(1.5.14)*** Oldjuk meg az $x^3=2$ és az $x^4=-9$ egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az $x^8=\sqrt{3}-i$, $x^n=-1$ egyenletek összes megoldását is.

**9.** ***(2.5.10)*** Írjuk föl az $x^4+4$ polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?

**10.** ***(1.5.24)*** Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et.

**11.** ***(1.5.23*)*** Hozzuk „zárt alakra” a következő összeget:

$$\binom{1867}{0}+\binom{1867}{4}+\binom{1867}{8}+\binom{1867}{12}+\ldots.$$

**12.** ***(1.4.16**)*** Hozzuk zárt alakra a $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)$ összeget.

*További gyakorló feladatok*

**13.** Mely $z$ komplex számokra igaz, hogy $z$ konjugáltjának képzetes része ugyanaz, mint $z$ képzetes részének konjugáltja?

**14.** Legyen $z=5-12i$. Mely valós $c$ számokra teljesül, hogy $|cz|=1$?

**15.** Igazoljuk, hogy egy $z$ komplex szám abszolút értéke akkor és csak akkor 1, ha $z$ reciproka megegyezik a konjugáltjával.

**16.** Mennyi $\cos(-30°)-i\sin(-30)°$ szöge? Ha $z$ szöge $40°$, akkor mennyi $2010/\bar{z}^{2010}$ szöge? Ha $w$ abszolút értéke 1, szöge pedig $60°$, akkor mennyi $\bar{w}/w^2$?

**17.** Bizonyítsuk be $n$ szerinti teljes indukcióval, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad \text{és}\qquad \sum_{j=1}^{n} j^3=\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big)^2=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2.$$