

## Bsc algebra1 gyakorlat

Második feladatsor (2012. szeptember 18–21)

- (2.4.14)** A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az  $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$  polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel  $f(x)$ -et  $(x - 2)g(x) + f(2)$  alakban.
- (2.5.11)** Hányszoros gyöke az  $x^4 - x^3 - x + 1$  polinomnak az 1? A Horner-elrendezést használjuk.
- Adjunk példát olyan 2012 fokú polinomra, melynek az 1 pontosan tízszeres, a  $-1$  pedig pontosan 20-szoros gyöke.
- Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke  $f$ -nek és hatszoros gyöke  $g$ -nek, akkor hány szoros gyöke  $f + g$ -nek, illetve  $f + g + fg$ -nek?
- Mutassuk meg, hogy az  $x^2 + bx + c$  polinomnak akkor és csak akkor van kétszeres gyöke, ha  $b^2 = 4c$ .
- Ha egy harmadfokú polinomnak van kétszeres gyöke, akkor hány (valós) gyöke van? Hány valós gyök lehet, ha a polinom negyedfokú?
- (3.3.16)** Adjuk meg a  $2x^3 + 3x + 5$  polinom racionális gyökeit.
- (HF)** Határozzuk meg azt a  $c$  számot, melyre a  $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x + c$  polinomnak gyöke az  $1/3$ , majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.
- Számítsuk ki az alábbi összegeket.  
$$\sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i}, \quad \sum_{i=0}^{100} 2^i \binom{100}{i}, \quad \sum_{i=0}^{100} (-1)^i \binom{100}{i}, \quad \sum_{i=0}^{50} \binom{100}{2i}, \quad \sum_{i=0}^{50} \binom{101}{i}.$$
- (2.4.20\*)** Van-e olyan egész együtthatós  $f$  polinom, melyre  $f(10) = 400$ ,  $f(14) = 440$  és  $f(18) = 520$ ?
- (2.4.26\*)** Ha az  $f \in \mathbb{Z}[x]$  polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?
- (2.4.16)** Az  $n$ -edfokú  $f(x)$  polinomba behelyettesítjük a  $b$  számot. Hány szorzásra van szükség  $f(b)$  kiszámításához, ha
  - egyáltalán nem trükközünk;
  - a  $b$  hatványait előre kiszámoljuk;
  - a Horner-elrendezést használjuk?
- (\*)** Mutassuk meg, hogy az  $x^3 + px + q$  polinomnak akkor és csak akkor van legalább kétszeres gyöke, ha  $27q^2 + 4p^3 = 0$ .
- (\*)** Legyen  $f(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$ . Írjuk föl  $f$ -et  $x + (1/x)$  polinomjaként, majd keressük meg a gyökeit.
- (\*)** Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$  páros fokú polinom, amely „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz  $a_i = a_{n-i}$  minden  $0 \leq i \leq n$  esetén, és  $a_0 \neq 0$ . Mutassuk meg, hogy  $f$  felírható  $x + (1/x)$  polinomjaként.
- (3.5.8\*)** Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ , ahol  $a_0$  és  $a_n$  nem nulla, és  $g(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0x^n$ . Igazoljuk, hogy a  $g$  polinom  $\mathbb{R}$ -beli gyökei pontosan az  $f$  gyökeinek a reciprokai (multiplicitással számolva is).