Bsc algebra1 gyakorlat

Első feladatsor (2012. szeptember 11–14)

Osztályzás. A két évfolyamzárthelyit legalább $12-12$ pontosra kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. Ezen kívül a gyakorlatokon írt röpdolgozatokból is megfelelő eredményt kell elérni. Az első és utolsó tanítási hét, valamint az őszi szünet előtti hét (okt. 22-26) kivételével mindegyik gyakorlaton van röpdolgozat, a *megelőző* heti előadás anyagából egy definíciót vagy tételt kell leírni (segédeszköz használata nélkül). Ez 10 alkalom. Összesen **8 pontot kell elérni ahhoz, hogy a gyakorlati jegy ne legyen elégtelen.** A teljesen precíz válaszra 2 pont, az apró hibákkal tarkítottra 1 pont jár. Általános információk, feladatsorok: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard`. Elérhetőség: `ewwkiss@gmail.com`. A K1.2.4 a Kiss: *Bevezetés az Algebrába* tankönyvre utal, a megoldások letölthetők a fenti honlapról.

1. Számítsuk ki az alábbi összegeket és szorzatokat.

$$\sum_{j=6}^{9}(-1)^j\,, \qquad \sum_{2<j<5} 2j+1\,, \qquad \sum_{2<j<k<6} jk\,, \qquad \sum_{p\,<\,7\text{ prím}} p^2\,, \qquad \prod_{1\le i\le 100000}(i-213)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\,, \qquad \prod_{i=1}^{n} 2^i\,, \qquad \sum_{i=0}^{n} q^i\,, \qquad (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}\,, \qquad \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{20} ij - \sum_{j=1}^{20}\sum_{i=1}^{100} ij\,.$$

Írjuk föl a szumma jelölés segítségével $\big(\sum_{i=1}^{n} a_i\big)\big(\sum_{j=1}^{k} b_j\big)$ beszorzott alakját.

2. Egyszerűsítsük: $\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{4}$; $\left(\sqrt[n-1]{x}\right)^{n^2-1}$; $(x^1)^2(x^2)^2\cdots(x^n)^2$; $x^{1^2}x^{2^2}\cdots x^{n^2}$. Nehezebb kérdés: fel tudjuk-e írni az utolsó képletben az x kitevőjét zárt alakban?

3. Alakítsuk szorzattá az a^3+b^3 kifejezést. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}\,, \qquad \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\,, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\,.$$

4. ***(K1.2.4)*** Alakítsuk szorzattá az $x^2-8x+15$ kifejezést. Adjuk meg az $u+v=8$, $uv=15$ egyenletrendszer **összes** valós megoldását. Tegyük meg ugyanezt az $u+v=14$, $uv=49$ egyenletrendszer esetében is.

5. Végezzük el az alábbi műveleteket a polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát: $(x^3+3x^2+2)-(x^3+3x-4)$, $(x^2+2x+3)(x^2+3)$.

6. Egy tizedfokú és egy n-edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

7. Mi lesz a 20-adfokú tag együtthatója a $(2x^{10}+x^5-1)(x^{20}+x^{15}-x^7+3x)$ polinomban?

8. Emeljük ki az $x-1$ gyöktényezőt az x^3-7x+6 polinomból, majd határozzuk meg az összes gyökét.

9. Oldjuk meg az $x^3+3x^2+3x+1=0$ és $x^3+3x^2+3x+2=0$ egyenleteket.

10. ***(*)*** Alakítsuk szorzattá az x^4+4 polinomot.

11. ***(*)*** Igazoljuk, hogy $x\mapsto\sin(x)$, illetve $x\mapsto 1/x$ $(x\neq 0)$ nem polinomfüggvény.

12. ***(*)*** Egy 100 elemű halmaznak páros, vagy páratlan elemszámú részhalmaza van több?

13. ***(**)*** Hány hárommal **nem** osztható együtthatója van az $(x+1)^{730}$ polinomnak?