Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2011. május 17.) — eredmények és pontozás

1. A leképezés mátrixa az $\{1, x, x^2\}$ bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (1 pont), a karakterisztikus polinom $-x^3+6x^2$ (1 pont), ennek gyökei, azaz a sajátértékek 0 és 6 (1 pont), a 6-hoz tartozó sajátvektorok ax^2+ax+a ($a \in \mathbb{R}$, 1 pont), a 0-hoz tartozók $cx^2+bx-2b-3c$ ($b, c \in \mathbb{R}$, 1 pont). Mivel x^2+x+1, $x-2$, x^2-3 független sajátvektorok, ezért a mátrix diagonalizálható (1 pont). A diagonalizálhatóság abból is következik, hogy a mátrix gyöke az x^2-6x polinomnak. *Második megoldás:* Mivel $x-2$ és x^2-3 nyilván a magtérben van, ezek 0-hoz tartozó sajátvektorok, továbbá a képteret generáló $1+x+x^2$ is sajátvektor 6 sajátértékkel. Ez a három polinom könnyen láthatóan bázist alkot.

2. A karakterisztikus polinom $-x^3$ (1 pont). Mivel a mátrix nem nulla, de a négyzete igen, ezért a minimálpolinom x^2 (2 pont). Így a mátrixban a legnagyobb Jordan-blokk mérete 2×2 (1 pont), tehát a Jordan-alak $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 pont).

3. Nyilván $b_1 = (1,1,0,0)/\sqrt{2}$ és $b_2 = (0,0,1,-1)/\sqrt{2}$ két merőleges egységvektor W-ben (1 pont). Legyen $v = (1,0,1,0)$, ekkor a Gram-Schmidt eljárással számolva $v-(b_1 \cdot v)b_1-(b_2 \cdot v)b_2$ értéke $(1,-1,1,1)/2$, ami egységvektor, tehát b_3-nak alkalmas (2 pont). Mivel a W hipersík normálvektora $n = (1,-1,-1,-1)/2$ (1 pont), ezért a keresett távolság $|n \cdot (1,1,2,3)| = 5/2$ (2 pont).

4. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (1 pont), sajátértékei 2 és 7 (1 pont), azaz a kvadratikus alak pozitív definit (1 pont). A megfelelő normált sajátvektorok $(-2,1)^T/\sqrt{5}$ és $(1,2)^T/\sqrt{5}$ (1 pont), ezért a négyzetösszeg alak

$$2\Big(\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 7\Big(\frac{x+2y}{\sqrt{5}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

5. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), ami nem szimmetrikus, ezért a mátrix nem diagonalizálható ONB-ben (1 pont), ugyanakkor ortogonális, mert a transzponáltjával vett szorzata az egységmátrix (1 pont). A karakterisztikus polinom $(x^3-1)(x-1)$, melynek gyökei 1 (kétszeres) és $\cos 120° \pm i \sin 120°$ (2 pont). Ezért a keresett mátrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ (1 pont).

6. $\mathcal{B}(v) \cdot v = v \cdot \mathcal{B}^*(v) = v \cdot \big(-\mathcal{B}(v)\big) = -\big(\mathcal{B}(v) \cdot v\big)$, ezért $\mathcal{B}(v) \cdot v = 0$. *Második megoldás:* Mivel $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$, ezért a $\mathcal{B}$ transzformáció B mátrixában a diagonális végig nulla, továbbá $b_{ij} = -b_{ji}$. A $v \cdot \mathcal{B}(v)$ skaláris szorzat a $[v]^T B [v]$ kvadratikus alak, ahol a változók a v vektor v_i koordinátái. Ez azonosan nulla, hiszen v_i^2 együtthatója B főátlójában van, $v_i v_j$ együtthatója pedig $b_{ij}+b_{ji}$.