Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2011. március 29.) — eredmények és pontozás

1. Az összeadásra és a skalárral való szorzásra zártság ellenőrzése $1+1$ pont. Az ax^2+bx+c akkor van az altérben, ha $4a+2b+c=9a+3b+c$, azaz $5a=-b$ (1 pont), ezért 1 és x^2-5x az altérben van (1 pont). Annak kiszámolásáért, hogy ezek függetlenek, illetve generátorrendszert alkotnak, $1+1$ pont jár. *Számolás nélküli megoldás:* mivel V háromdimenziós, és W ennek valódi altere (hiszen pl. $x\notin W$), ezért $\dim(W)\le 2$ (2 pont). Az 1 és az $(x-2{,}5)^2$ polinomok W-beliek és függetlenek, mert a fokuk különböző (1 pont). Mivel a dimenzió legfeljebb 2, ezért bázist alkotnak (1 pont). Megjegyezzük, hogy az altér elemei az $(x-2)(x-3)f(x)+c$ alakú polinomok.

2. Az $\mathbb{R}^3$-ben a szokásos e_1, e_2, e_3 bázist, a W-ben a szokásos $1,x,x^2,x^3$ bázist használjuk. Ekkor $\mathcal{A}(e_1)=x^3+1$, $\mathcal{A}(e_3)=x^3+2$, $\mathcal{A}(e_3)=x^3+3$, ezért a keresett mátrix

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad\text{(2 pont).}$$

Az $\alpha(x^3+1)+\beta(x^3+2)+\gamma(x^3+3)$ polinom pontosan akkor nulla, ha $\alpha+\beta+\gamma=0$ és $\alpha+2\beta+3\gamma=0$ (2 pont). Ennek a lineáris egyenletrendszernek az általános megoldása $(\gamma,-2\gamma,\gamma)$, ezért a magtér 1-dimenziós (2 pont). Második megoldásként hivatkozhattunk volna a dimenziótételre is, mert a képtér könnyen láthatóan a teljes $\langle 1,x^3\rangle$, azaz kétdimenziós.

3. Az $x_1\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\4&6\end{pmatrix}$, illetve $=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ lineáris egyenletrendszereket kell megoldani (2 pont). Az első esetben van megoldás (például $x_1=6$, $x_2=5$, $x_3=-2$, $x_4=0$, $x_5=0$), a másodikban nincs $(2+2$ pont). Ez utóbbi állítás Gauss-elimináció nélkül is látszik, hiszen a generátormátrixok mindegyikére teljesül, hogy az első és második oszlop elemeinek összege ugyanaz, tehát a generált altér minden elemére is.

4. Elég a függetlenséget vizsgálni, mert 4 vektor egy négydimenziós térben pontosan akkor alkot bázist, ha független (2 pont). Ha $\alpha(b_1+b_2)+\beta(b_2-b_3)+\gamma(b_3+b_4)+\delta(b_4-b_1)=0$, akkor a független b_i vektorok szerint rendezve az együtthatók nullával egyenlőek, ezért $\alpha-\delta=0$, $\alpha+\beta=0$, $\gamma-\beta=0$, $\gamma+\delta=0$ (2 pont). Ennek $\alpha=\delta=1$ és $\beta=\gamma=-1$ nemtriviális megoldása, ezért a kérdéses négy vektor sem nem független, sem nem generátorrendszer (2 pont).

5. A forgatás, illetve a tükrözés mátrixa (a szokásos bázisban)

$$\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix},\quad\text{illetve}\quad\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$(1+1$ pont). Ezért az összetett leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

(2 pont), az $(1,5)$ képének koordinátavektora

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-\sqrt{3}+5)/2\\(1+5\sqrt{3})/2\end{pmatrix},$$

tehát az $(1,5)$ képe $\big((-\sqrt{3}+5)/2,(1+5\sqrt{3})/2\big)$ (2 pont). (Az összetett transzformáció az origón átmenő, az x-tengellyel 75°-os szöget bezáró egyenesre való tükrözés.)

6. A feltétel szerint $\dim\operatorname{Im}(\mathcal{A})\le 1$ (1 pont). Mivel $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^2)\subseteq\operatorname{Im}(\mathcal{A})$, ezért $\dim\operatorname{Im}(\mathcal{A}^2)\le 1$ (2 pont), és így a dimenziótétel miatt $\dim\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^2)\ge 3$ (1 pont). A lehetséges értékek tehát 3, illetve 4. Ha $\mathcal{A}=0$, akkor $\dim\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^2)=4$ (1 pont). Legyen $\mathcal{A}$ az a transzformáció, amely (x,y,u,v)-hez $(x,0,0,0)$-t rendel, ekkor a magtér háromdimenziós lesz (1 pont).